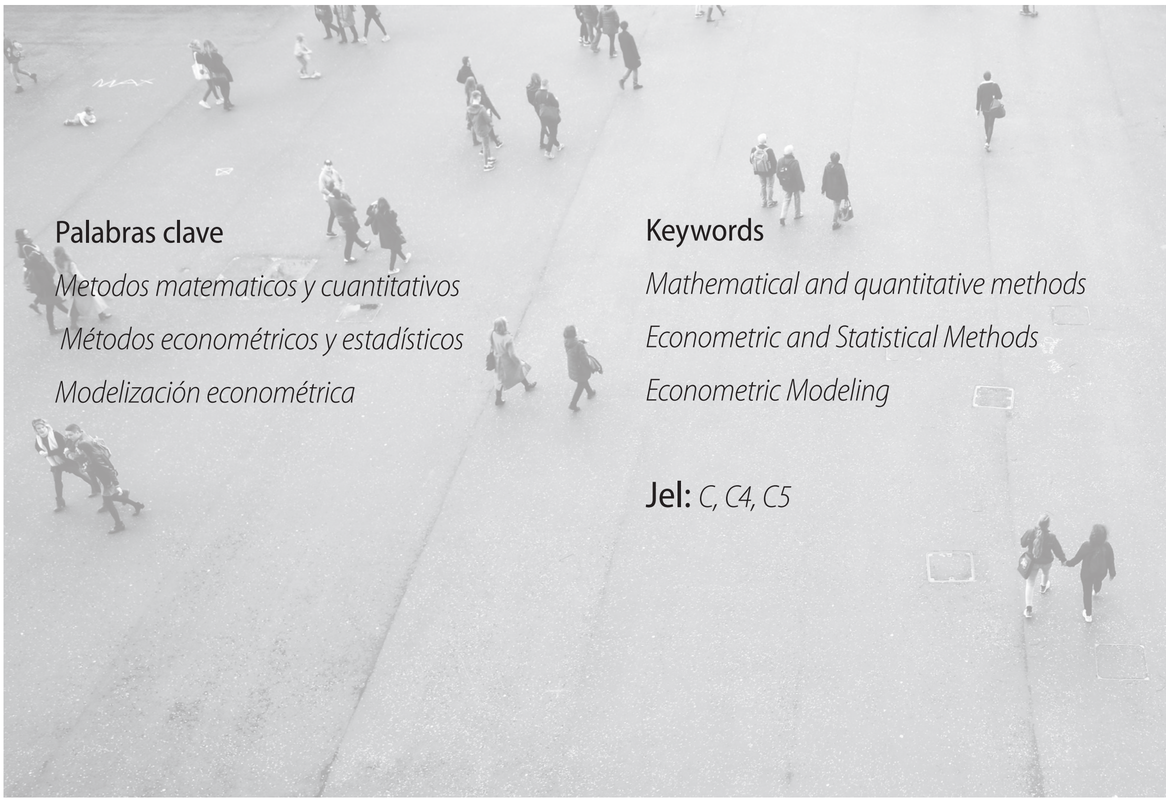
¿Cómo podemos estudiar el comportamiento de los agentes en condiciones de incertidumbre? Una introducción al modelo QRSE. Parte I*

How can we study the behavior of agents under uncertainty? An introduction to the QRSE model. Part 1

Luis Daniel Torres González



Palabras clave

Metodos matematicos y cuantitativos

Métodos econométricos y estadísticos

Modelización econométrica

Keywords

Mathematical and quantitative methods

Econometric and Statistical Methods

Econometric Modeling

Jel: *C, C4, C5*

* Agradezco los comentarios y sugerencias de José Coronado, Alberto González y los participantes del Seminario de Doctorado de Temas Metodológicos de Análisis Insumo-Producto del Campo de Conocimiento de Teoría y Método. El artículo contó con el apoyo del programa de Estancias Posdoctorales por México (2021) del CONACYT.

** Correo electrónico: torrl352@newschool.edu
Facultad de Economía, BUAP

Resumen

El presente artículo presenta la primera parte de una introducción al llamado modelo QRSE (*Quantal Response Statistical Equilibrium*). El modelo se ha convertido en una herramienta poderosa para estudiar tanto la toma de decisiones de las agentes en condiciones de incertidumbre como la interacción que se da entre estas decisiones individuales y variables con una escala social. El modelo combina la medida de entropía informática de Claude E. Shannon para cuantificar la incertidumbre con el principio de maximización de la entropía de Edwin T. Jaynes para la inferencia de funciones de probabilidad con base en información limitada. El modelo se ha utilizado para estudiar procesos de competencia en mercados de mercancías, financieros y de vivienda. También, se ha utilizado como alternativa a modelos de juegos experimentales. En todas sus aplicaciones ha podido reproducir diversas regularidades estadísticas observadas en economías reales. En esta trabajo, paso a paso, se construirá la primera parte del modelo QRSE: la función de probabilidad condicional con la que las agentes toman decisiones dado el valor de las variables sociales. En la segunda parte se expondrá, bajo el mismo marco conceptual, ahora cómo las decisiones de los agentes afectan a las variables sociales. Con ambas piezas podremos cerrar el modelo y obtener la probabilidad conjunta entre las decisiones y las variables sociales.

Abstract

This article presents the first part of an introduction to the so-called QRSE (*Quantal Response Statistical Equilibrium*) model. The model has become a powerful tool to study both the decision-making of agents in conditions of uncertainty and the interaction that occurs between these individual decisions and the variables with a social scale. The model combines Claude E. Shannon's informational entropy measure for quantifying uncertainty with Edwin T. Jaynes' entropy maximization principle for inferring probability functions based on limited information. The model has been used to study competition processes in commodity, financial, and housing markets. In addition, it has been used as an alternative to experimental game models. In all its applications it has been able to reproduce various statistical regularities observed in real economies. In this paper, step by step, the first part of the QRSE model will be built: the conditional probability function with which the agents make decisions given the value of the social variables. In the second part, it will now be exposed, under the same conceptual framework, how the decisions of the agents affect the social variables. With both pieces we can close the model and obtain the joint probability between the decisions and the social variables.

1. Introducción

Las decisiones de las agentes y su relevancia para la economía. Diversas variables económicas consisten en la agregación de acciones que realizan diversas agentes: 1,000 millones de pesos de inversión en la rama automotriz en México o una demanda de dinero de 5 trillones de dólares en los EE. UU. son el agregado de la acción de invertir y mantener activos líquidos de decenas, miles o millones de agentes. Estas acciones son producto de un proceso de toma de *decisiones*.

Las agentes constantemente toman decisiones y *eligen* diversas acciones como invertir o salir de un mercado, comprar o vender un bono, aceptar o rechazar un trabajo, etc. Estas decisiones no tienen que ser dicotómicas: en la conformación de un portafolio de inversión, las agentes eligen una composición de su riqueza en dinero, bonos, acciones, etc. En cualquier caso, las decisiones determinan la magnitud de diversos agregados micro o macroeconómicos. Por tanto, el estudio de la toma de decisiones es fundamental para el análisis económico.

La toma de decisiones por parte de las agentes se realiza con base en incentivos que dependen de un conjunto de *variables relevantes*, como los precios y las tasas de retorno. Dependiendo de estas variables las agentes pueden tomar una decisión u otra. Al mismo tiempo, las acciones que llevan a cabo las agentes tienen un impacto en estos precios y tasas de retorno: Si las agentes que controlan buena parte de la liquidez de la economía deciden reducir su demanda de dinero para comprar bonos a largo plazo, estas acciones terminarán afectando tanto al precio de los bonos en el mercado secundario como a las tasas de interés de estos instrumentos de deuda en el mercado primario. Debido a que estas variables se ven afectadas por el conjunto de agentes, estas variables pueden ser consideradas *variables sociales*.

Existe entonces una codependencia entre las acciones de los agentes y las variables sociales. En muchos ocasiones esta codependencia contiene un mecanismo de *retroalimentación negativa* (*negative feedback*). Es decir, las acciones de las agentes se guían por incentivos determinados por las variables sociales. A su vez, estas acciones provocan cambios en las variables sociales en un sentido inverso al que provocó dicha acción, generando con esto un menor incentivo a realizar esta acción. Este razonamiento, dejado hasta sus últimas consecuencias, termina provocando una situación de *equilibrio* caracterizada por la ausencia de *(i)* incentivos para realizar acciones y de *(ii)* variaciones en las variables sociales. Un ejemplo claro de la conformación de un equilibrio producto de la retroalimentación negativa entre las acciones de las agentes y las variables sociales proviene de la teoría de competencia de Adam Smith:

> *Las ventajas y desventajas totales de los diversos empleos del trabajo y el capital [potencialmente capturadas por las tasas de salarios y de ganancia, respectivamente] en una misma zona deben o bien ser perfectamente iguales o tender constantemente hacia la igualdad. Si en un mismo lugar hubiese un empleo evidentemente mucho más o mucho menos ventajoso que los demás, habría tanta gente que invertiría en él en el primer caso, o que lo abandonaría en el segundo, que sus ventajas pronto retornarían al nivel de los demás empleos. Este sería el caso al menos en una sociedad donde se permitiese que las cosas siguieran su curso natural, donde hubiese total libertad, y donde cada persona fuese perfectamente libre tanto para elegir la ocupación que desee como para cambiarla cuantas veces lo juzgue conveniente. El interés de cada persona lo induciría a buscar el empleo más ventajoso y a rechazar el menos ventajoso (Smith, 1776[1996], p. 152).*

Las decisiones se realizan en un ambiente de incertidumbre. Una característica importante del proceso de toma de decisiones es que estas se realizan en condiciones de *incertidumbre* por el resultado de las decisiones. Por ejemplo, la adopción de una nueva técnica de producción al interior de la empresa podría traer una tasa de retorno menor que la prevaleciente antes del cambio técnico. El precio de las viviendas podría haber crecido mucho más del estimado, pero el mercado también podría experimentar una explosión de una burbuja especulativa, provocando una gran pérdida en su valor.

Pero entonces, si producto de la incertidumbre no se tiene certidumbre sobre el resultado último de las acciones, ¿cómo es que deciden las agentes sus acciones? Al menos desde la publicación de *El Tratado sobre el Dinero* de Keynes (1930[2013]) se aceptó que la incertidumbre sobre los valores *futuros* de las variables tiene efectos no triviales sobre las decisiones que toman los agentes *hoy* y, por lo tanto, para el desempeño de la economía el día de *hoy*. Por tanto, la disciplina económica ha buscado caracterizar a la incertidumbre, proponer métricas de medición, identificar sus determinantes y desarrollar sus implicaciones.

La formación de expectativas y el análisis de equilibrio. La incertidumbre genera que las agentes basen sus decisiones en *expectativas* sobre el valor futuro de las variables. Así, valores esperados de las variables y niveles de incertidumbre influyen en las acciones que realizan las agentes. Algunas posiciones teóricas consideran que la incertidumbre y las expectativas son tan importantes que el análisis económico de equilibrio basado en posiciones de largo período, i.e., donde operan fuerzas que provocan una tendencia hacia la igualdad en las tasas de retorno, como en el ejemplo de Smith, son poco útiles para explicar diversas variables sociales.[1] Dentro de estas posiciones teóricas incluso se considera que la existencia de información limitada sobre la toma de decisiones implica la incapacidad para poder asignar probabilidades a las posibles acciones de los agentes.

Descripción de las decisiones en términos probabilísticos. Los esfuerzos por formalizar la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre se encuentran, por lo menos, desde la obra de Keynes (1921) y Ramsey (1926, capítulo VII).[2] En general, este enfoque considera que es conveniente *representar* la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre en términos probabilísticos.[3] Un enfoque relevante ha sido la teoría de la utilidad de von Neumann y Morgenstern (1944, capítulo 1 y Apéndice), la cual concluye que, bajo ciertas condiciones sobre el comportamiento de las agentes, sus decisiones sobre las posibles acciones pueden estudiarse *como si* maximizaran su utilidad (cardinal) esperada.[4] Si bien este modelo predice que las agentes tendrán una estrategia única, i.e., que elegirán únicamente una acción, bajo condiciones alternativas las agentes tendrán, en general, una estrategia mixta regulada por una función de probabilidad.

El modelo QRSE y sus aplicaciones. El modelo QRSE (*Quantal Response Statistical Equilibrium*), de reciente desarrollo, constituye un ejemplo en esta última dirección. Este

1 Véase Garegnani (1976) y Dutt y Amadeo (1993) para una exposición.

2 Véase, por ejemplo, a Machina (1987a) para una revisión a la literatura.

3 Brennan (1987) indica que esta visión se encuentra desde 1906 con Irving Fisher 1906 (*The nature of capital and income*) y en 1934 con Hicks (*Application of mathematical methods to the theory of risk*).

4 Véase Machina (1987b) y Schmeidler y Wakker (1987) para una exposición sobre la literatura.

modelo permite estudiar las decisiones en condiciones de incertidumbre en términos probabilísticos y, de manera adicional, conectar estas decisiones con las variables económicas en un proceso de retroalimentación negativa que genera un equilibrio de naturaleza estadística.

Foley (2020) proporciona la bases para el comportamiento de las agentes dadas las variables sociales en múltiples situaciones, como para grupos de agentes con diferente nivel de incertidumbre. Scharfenaker y Foley (2017) emplean el modelo QRSE para formalizar la teoría de la competencia de Smith y explicar las fuertes tendencias a la uniformidad en las tasas de ganancias a nivel empresa observadas en las economías avanzadas. Scharfenaker (2020) desarrolla el modelo y lo aplica al mercado accionario. Ömer (2018) emplea el modelo QRSE para estudiar al mercado de vivienda y sus tasas ganancias por capital. Scharfenaker y Foley (2021) estudian el mercado laboral para explicar la interacción entre trabajadores y capitalistas y la tasa de salarios. Yang (2018,2022) emplea el modelo QRSE para generalizar el modelo de Kennedy (1964) de cambio técnico inducido y estimar la frontera de posibilidades de innovación. Dentro de la economía experimental, Coronado (2018) emplea al modelo para estudiar la percepción de justicia por parte de las agentes en los llamados *ultimatum games*.

El modelo QRSE se distingue de otros modelos *quantal response equilibrium* en que emplean la medida de entropía informática de Shannon (1948) para representar la incertidumbre de las agentes. También, utilizan el principio de maximización de la entropía desarrollado por Jaynes (1957) para estimar la probabilidad que regula la estrategia mixta de los agentes y de las variables sociales. Dentro de este marco, diferentes hipótesis sobre el comportamiento de las agentes (como la formación de expectativas) y la manera en que el mercado reacciona ante dichas acciones provocan un mecanismo de retroalimentación negativa que genera un equilibrio estadístico en las variables sociales (tasas de ganancia, tasas de retorno, tasa de reducción de costos, etc.) caracterizado por fuertes tendencias a la centralidad de las variables sociales, así como fluctuaciones alrededor de estos centros de gravedad endógenamente determinada. De esta manera, el modelo QRSE puede considerar perfectamente tanto la existencia de incertidumbre y formación de expectativas como posiciones de largo período caracterizadas por una fuerte tendencia a la uniformidad de ciertas varias variables sociales.

Comenzamos la presentación del modelo QRSE estudiando las acciones que realizan las agentes tomando los incentivos de estas acciones como dados. Es decir, estimaremos la probabilidad condicional de las acciones de la agente dadas las variables sociales. Este modelo constituye una derivación alternativa del modelo *logit* de respuesta cuántica. Se mostrará que existe una dualidad entre la incertidumbre que experimenta la agente y la incertidumbre de la investigadora social que pretende estudiar la toma de decisiones las agentes en condiciones de incertidumbre.

2. El espacio de los estados: las posibles acciones de las agentes

Suponga que una agente debe de tomar una decisión al *elegir* una acción dentro de un conjunto finito de acciones mutuamente excluyentes. Sea $K \in \mathbb{N}$ el número de posibles acciones. Llamemos al conjunto de posibles acciones

$$(1) \qquad A := [a_k] := \{a_1, a_2, \dots, a_K\}.$$

Un ejemplo de una elección dicotómica podría ser entrar a/salir de un mercado o comprar/vender una propiedad. En este caso *K=2* y el conjunto de acciones posibles y mutuamente excluyentes es $A = \{a_{\text{entrar}}, a_{\text{salir}}\}$ ó $A \coloneqq \left\{a_{\text{comprar}}, a_{\text{vender}}\right\}$. Otro ejemplo un poco más complejo podría ser una agente que necesita decidir la distribución de su riqueza financiera en una cartera compuesta únicamente por dos activos, digamos dinero y bonos. Supongamos por simplicidad que la composición de la cartera solo puede tener la precisión de 1 décima. Así, el número de posibles acciones sería *K=11* y el conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_{11}\}$ sería

$$
\begin{aligned}
&a_1 \coloneqq (1.0\ ,\ 0.0)\\
&a_2 \coloneqq (0.9\ ,\ 0.1)\\
&\qquad\vdots\\
&a_{11} \coloneqq (0.0\ ,\ 1.0),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

donde $a_1 \coloneqq (m_1, b_1)$ representa una composición de la cartera donde toda la riqueza adquiere la forma de dinero m_1=1 y nada en bonos b_1=0, y $a_6 \coloneqq (m_6, b_6)$ indica una cartera uniformemente distribuida, m_6=b_6=0.5.

El conjunto de estas *K* acciones constituye el *espacio de los estados* del sistema. Cada una de las acciones sobre las cuales las agentes deciden (1 de 2 en el caso dicotómico y 1 de 11 en el caso de la cartera) corresponde a un *microestado*. Una primera restricción en el modelo, producto de la teoría, consiste entonces en la definición del estado de espacios.[5]

3. La función de utilidad o de pago (pay-off) de las agentes.

La toma de decisiones por parte de las agentes generalmente involucra una evaluación del resultado de sus decisiones. La decisión de invertir en un mercado (“entrar” en el mercado) puede verse afectada por el ingreso, la masa de ganancias o la tasa de retorno asociada a esta inversión. La rentabilidad de los diversos activos disponibles para las agentes también incide en la conformación de la cartera de inversión.

Así, otra restricción producto de la teoría económica consiste en seleccionar al conjunto de *variables relevantes* para la toma de decisiones y la manera en que estas interactúan. Sea $x \in \mathbb{R}$ una de estas variables relevantes, como la tasa de retorno o la tasa de interés. Si la elección involucra dos activos, entonces $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ serían las variables relevantes. Típicamente estas variables relevantes x_1, x_2,... se encuentra fuera del control exclusivo de las agente: en algunos casos no se tiene influencia alguna (*e.g.,* en los modelos neoclásicos de competencia perfecta) y en otros casos se tienen un impacto pequeño o considerable (*e.g.,* en los modelos de competencia de la economía política clásica y de competencia imperfecta, respectivamente). Por tal motivo, x_1, x_2,... pueden ser consideradas *variables sociales*.

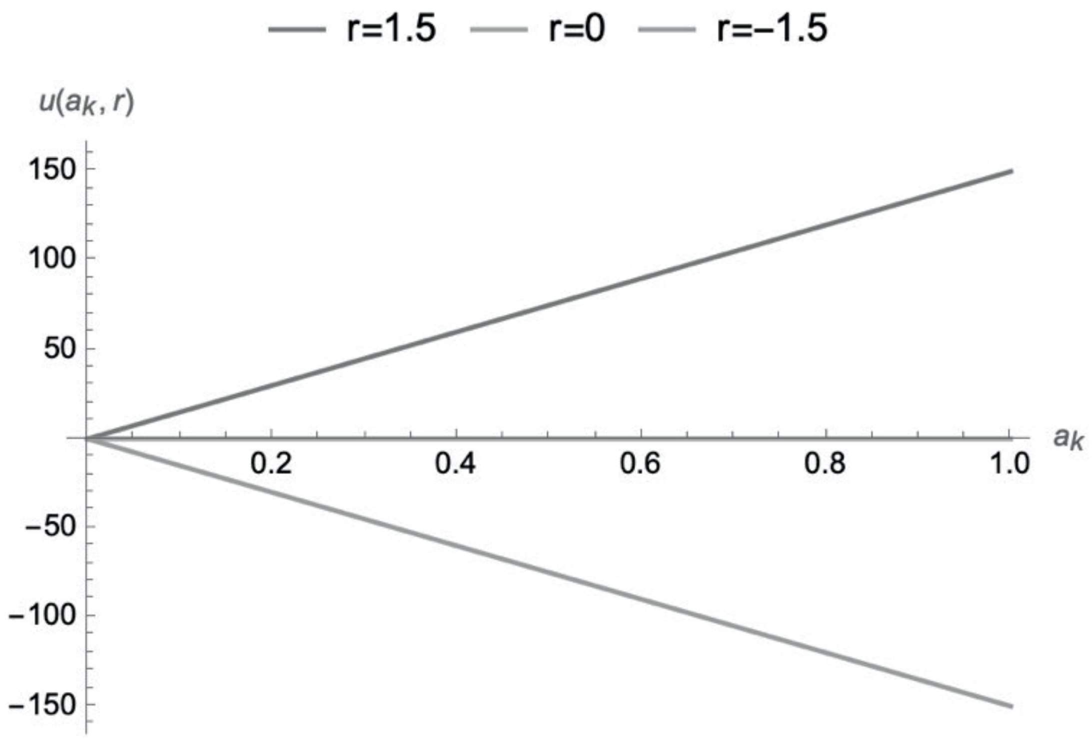
Llamemos a la función que nos brinda una medida del resultado de la acción, por ejemplo, del resultado de elegir entrar en o salir de un mercado o de elegir una cartera de inversión

5 Tal vez le pueda resultar fácil al lector concluir que esta primera restricción dentro de la modelación económica es un tanto trivial. Pero considere que en todo momento existen múltiples variables que la teorización económica no puede incorporar. La determinación del espacio de estados debe de estar restricta a aquellos estados que se consideren relevantes para el estudio de los fenómenos de interés. Considere el desarrollo del motivo especulativo para la demanda de dinero. Capraro, et al. (2020, capítulo 3) describen como, si bien en el siglo XIX y principios del siglo XX la disciplina económica conocía de la especulación financiera, no fue sino hasta los 1920s-1930s, derivado de los cambios en los mercados financieros producto de la Primera Guerra Mundial, que economistas como Keynes y Lavington añadieron el motivo especulación dentro de los motivos para demandar dinero.

particular, *la función de utilidad (cardinal) o la función de pago* $u[a_k, x]$, donde $u[a_k, x]: A \to \mathbb{R}$.

Por ejemplo, la elección a_1 de una trabajadora de comprar en el mercado primario un bono con valor nominal de \$100 (y mantenerlo por un año) le trae un utilidad que podría representarse por el flujo de intereses asociado a la tasa del cupón i, $u(a_1,i)$=\$100. i. Si ahora la agente consiste en una empresa financiera dedicada a la compraventa de activos de deuda (como un banco moderno), el pago relevante para la misma acción podría ser $u(a_1, i, \Delta p) = \$100(i + \Delta p)$, donde ahora i sería la tasa de rendimiento (*yield rate*), p el precio del instrumento de deuda y Δp las llamadas "ganancias (o pérdidas) por capital".[6]

Gráfica 1 Una función de utilidad o de pago $u[a_k,r]=r \cdot a_k \cdot \$100$ dependiente de las acciones de las agentes a_k y de la variable social x



6 Aquí encontramos otro ejemplo donde la elección de la teoría e hipótesis económicas resulta vital: para el estudio del mercado de deuda y de dinero: ¿basta con considerar en la función de pago únicamente a la tasa de interés? ¿Qué empresa financiera cuyo giro principal es la compraventa de instrumentos de deuda y que paga rentas de edificios, nóminas, etc. puede tener una rentabilidad 'decente' con una tasa de interés de 3.29% anual en los bonos del tesoro de los EE. UU. a 1 año (9 de agosto de 2022)? ¿Quién concentra una mayor tenencia de bonos? ¿Los trabajadores o las empresas? ¿Y las empresas que compran y venden títulos de deuda en mercados internacionales? ¿Habría algún componente adicional que valdría la pena incluir en su función de pago?

En general, es posible construir una función de utilidad que dependa de las *decisiones* de los agentes y de los valores de las *variables sociales*. El gráfico 1 muestra la función de utilidad $u[a_k, r] \coloneqq r \cdot a_k \cdot \$100$, donde r es la tasa de retorno total de la tenencia de un bono y a_k, para k=1,...,K, es la acción de destinar una participación de una riqueza de $100 en bonos ($a_1$=0,...$a_k$=1). Para tasas de retorno positivas, entre mayor la participación de la riqueza en bonos mayor la utilidad, mientras que lo contrario sucede para tasas de retorno negativas. Cuando r=0 la utilidad es cero para cualquier tenencia de bonos.

4. Incertidumbre y expectativas.

Un aspecto fundamental en el proceso de toma de decisiones por parte de las agentes es que estas decisiones se realizan en un ambiente de *incertidumbre*. La incertidumbre radica en la falta de seguridad sobre el *resultado futuro* de la acción, en términos de la función de pago. La compra que un trabajador realiza de un bono corporativo podría resultar en una pérdida total si la empresa se declara en banca rota. La agente que decide invertir en un mercado podría obtener una tasa de retorno que no consideraba en la elaboración de su plan de negocios.

Sin embargo, a pesar del desconocimiento del valor futuro de cada $u[a_k,x]$, todo el tiempo las agentes eligen una acción el día de hoy. Es decir, tienen que tomar decisiones en condiciones de incertidumbre.

Como recurso auxiliar en la toma de decisiones presentes, las agentes forman *expectativas* sobre los eventos futuros. Estas expectativas se forman con base en un conjunto de información inicial y ciertos criterios que pueden variar de agente en agente.[7] Las agentes podrían tomar en cuenta la opinión de una asesora financiera o algunos estadísticos que arrojan la terminal de Reuters. Así, las agentes podrían utilizar algún indicador representativo de la variable social x, como su valor esperado x^e, o podrían representar su incertidumbre sobre x por medio de una función de probabilidad.[8] La elección recae en la teoría del comportamiento utilizada.

No obstante, la posibilidad de realizar este cálculo de indicadores sobre los valores futuros de la variable social no elimina necesariamente la incertidumbre sobre el resultado de sus acciones y el valor futuro de su función de pago. Keynes (1936, capítulo 13) hablaba de la distinción entre la esperanza actuarial y el *estado de confianza en los mercados.* Para Keynes la acción conjunta de ambas determina el estado de expectativas de largo plazo.

Un enfoque que se considera útil para representar la toma de decisiones de las agentes en condiciones de incertidumbre es a través de la maximización de su *utilidad esperada.* Esta métrica se obtiene como una agregación de utilidades ponderada por una probabilidad asociada.[9] Veamos esto con mayor detalle:

Consideremos la probabilidad con la que la agente realiza cada una de las K posibles acciones. Sea $p_k \coloneqq p[a_k]$ la probabilidad de cada microestado y

7 Si bien el conjunto de agentes puede tener acceso a la misma información puede haber diferentes criterios entre agentes que haga, por ejemplo, que unos sea toros (*bulls*) y otros osos (*bears*). Véase a Capraro, et al. (2020, capítulo 5) para una discusión sobre el conjunto de información inicial y la manera en que los/las agentes la procesan.

8 La modelación de las reglas de formación de expectativas es otra dimensión donde la elección de las hipótesis económicas es relevante. Véase una discusión muy accesible en Capraro, et al. (2020, capítulo 10). Véase Tobin (1958) para una aplicación de este segundo camino para el estudio de la preferencia por la liquidez.

9 En las siguientes líneas veremos que la probabilidad puede estar asociada a las acciones a_k o a la variable social x.

(3) $p := [p_k] := \{p_1, p_2, \ldots, p_K\}$

donde $p_k \geq 0$ para k=1,..., K
y $\sum_{k=1}^{K} p_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_K = 1$. Así, cada acción dicotómica o cada posible cartera tiene una probabilidad no negativa de elegirse. El gráfico 2 muestra cuatro casos de función de probabilidad cuando la elección es dicotómica, $A = \{a_1, a_2\}$. Una situación donde la probabilidad de que dos o más eventos es positiva implica que la agente tendrá un comportamiento caracterizado por una *estrategia mixta*, es decir, una situación donde en algunas situaciones escogerá una acción y en otras una acción alternativa –funciones de probabilidad (c) y (d)–, pero nunca la misma acción en cada situación – funciones de probabilidad (a) y (b).

Dentro del modelo QRSE, consideramos la probabilidad con la que la agente realiza cada una de las acciones tomando a la variable social (o estadísticos de ella) como dada. Así, la función de pago esperada es

(4)

$$E[u] := \sum_{k=1}^{K} p_k u[a_k; x] = p_1 u[a_1; x] + p_2 u[a_2; x] + \cdots + p_K u[a_K; x]$$

donde $p_k := p[a_k | x]$ es la probabilidad condicional de la acción a_k dada la variable social x.[10] La utilidad esperada es entonces un promedio ponderado de la utilidad obtenida por cada una de las K acciones $u[a_k; x^e]$, donde los ponderadores consisten en las probabilidades $p[a_k | x]$. Aunque $u[a_k, x^e]$ pueda ser una función no lineal, la función $E[u]$ es una función lineal sobre las p_k.

Ante esta elección, hemos optado por *representar la incertidumbre que experimenta la agente a través de las probabilidades con las que la agente realiza cada acción* $\{p_1,...,p_k\}$ y no imponiendo restricciones probabilísticas sobre la variable social, fuera de las que se hereden de la función de pago $u[a_k,x]$. De esta manera, proponemos medir la cantidad de incertidumbre sobre la variable aleatoria a_k a través de la *entropía informática* de Shannon (1948): [11]

(5)

$$H := H(p_1, \ldots, p_K) := -\sum_{k=1}^{K} p_k \ln p_k = p_1 \ln\frac{1}{p_1} + p_2 \ln\frac{1}{p_2} + \cdots + p_K \ln\frac{1}{p_K} \geq 0$$

Conviene enfatizar que esta medida es una función de las probabilidades de cada uno de las K acciones y no de la naturaleza o semántica de las a_k. La cantidad $-\ln p_k = \ln\frac{1}{p_k} \geq 0$ representa la información contenida de la elección a_k (*e.g.,* Golan, 2018, capítulo 3), por lo que H representa entonces la cantidad de información esperada. La función $-\ln p_k$ es cóncava por lo que H, siendo una suma de funciones cóncavas, también lo es.

Veamos por qué la función H captura la cantidad de incertidumbre de una variable. Cuando alguna de las acciones tiene una probabilidad de 1 entonces las restantes K-1 acciones tienen probabilidad de cero. En esta situación, ejemplificada en (a) y (b) en el gráfico 2, tenemos una situación de cero entropía o completa certidumbre.[12] Por el contrario, el estado de máxima incertidumbre se alcanza

10 De manera alternativa uno podría fijar una acción particular y considerar la utilidad esperada dada una función de probabilidad de la variable social (continua) x, como $E(u) := \int u[a_k,x] f(x)dx$, donde el intervalo de integración depende del soporte de la variable x y $f(x)$ es su función de densidad. Al no tener una especificación de la función de pago, la representaremos simplemente como $u[a_k;x]$ aunque pueda depender de manera adicional x^e de y/o algunos otros indicadores derivados de x.

11 Véase, *inter alia*, a Kapur y Kesavan (1992, sección 2.2) para un tratamiento profundo pero accesible sobre la caracterización matemática de esta medida. Convencionalmente se considera que 0In 0=0. Recuerde que $0 \leq p_k \leq 1$, por lo que $\text{In} p_k \leq 0$.

12 ¿Cuál es la probabilidad de que 2+2=4? La probabilidad es 1. No hay incertidumbre y la entropía es cero.

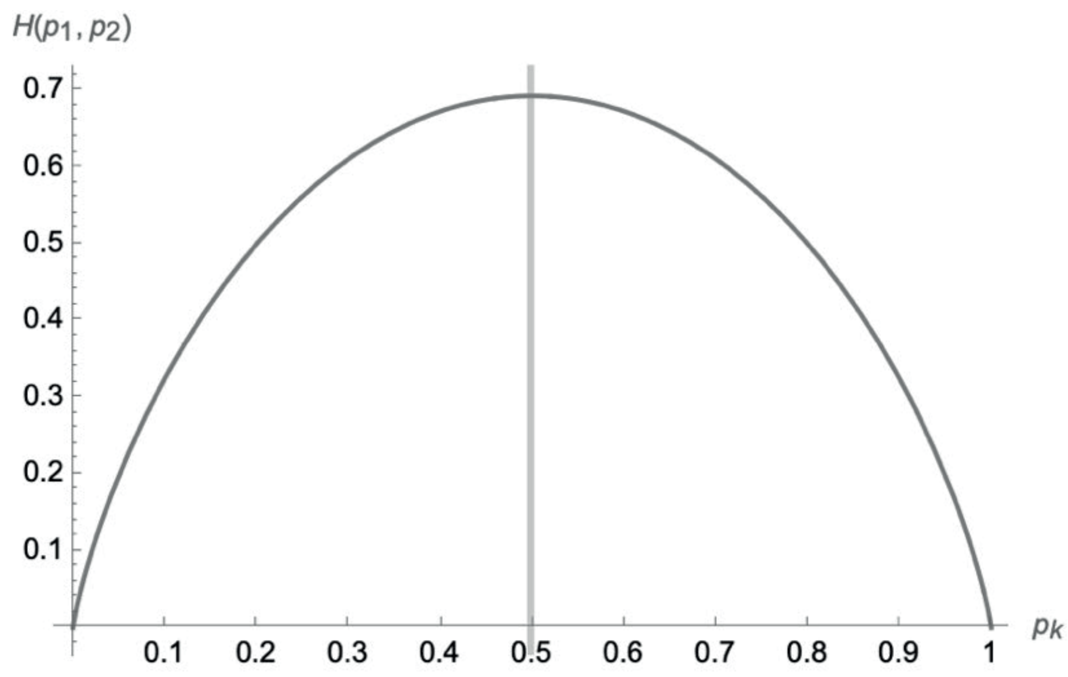
cuando cada una de las K posibles acciones tienen la misma probabilidad, $p_k = \frac{1}{K}$ (caso (c) en el gráfico 2).[13] Así, la entropía máxima $H_{\max}$ de la función de probabilidad $p1,...,p_k$ es una función monotónica creciente del número de estados, $H_{\max} = -\sum_{k=1}^{K} \frac{1}{K}\ln\left(\frac{1}{K}\right) = \ln K$ –entre más estados posibles mayor la incertidumbre sobre el sistema, *i.e.*, la elección de cada uno de ellos.

Para el caso de un sistema donde K=2, el gráfico 3 muestra la relación entre las probabilidades de un evento y la entropía del sistema:[14] la entropía es máxima ($H_{\max}$=In2≈0.69 cuando $p_1 = p_2 = \frac{1}{K} = \frac{1}{2}$ y es mínima cuando p_1=0 y por lo tanto p_2=1 y viceversa (ver gráfica 3).

5. El criterio para elegir a las distintas funciones de probabilidad $\{p_k\}$: el principio de maximización de la entropía

En este momento nos encontramos con toda la información necesaria para obtener la probabilidad con la que las agentes realizan cada una de estas acciones, salvo una pieza faltante. Sabemos que, por consistencia de nuestro modelo probabilístico, $p_k \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$. También, hemos supuesto que las agentes toman sus decisiones basadas en su función de pago $u[a_k; x]$ y que podemos representar su proceso de decisión por medio de la maximización de

Gráfica 3 Valor de la entropía *H* para una función de probabilidad con elección dicotómica



13 Maximice la función H(p_1,...,p_k) sujeta a la restricción $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$. Se trata de un programa cóncavo por lo que las condiciones de primer orden son necesarias y suficientes para obtener a la solución $p_1^*, \ldots, p_K^*$.

14 Adaptado de Golan (2018, capítulo 3).

la utilidad esperada. También, sabemos que las agentes realizan sus elecciones bajo condiciones de incertidumbre y hemos propuesto medir a la cantidad de incertidumbre sobre las acciones con la métrica de entropía informática de Shannon $H(p_1, \ldots, p_K)$, la cual puede ser cero o positiva. Nos falta definir el criterio para escoger una única función de probabilidad $p_1^*, \ldots, p_K^*$ dentro de todas las existentes $p_1, \ldots, p_K$ que son consistentes con la anterior información. Por ejemplo, si tenemos a la utilidad esperada $E(u) = p_1 5 + p_2 20 + p_3 15 = 10$ notará que esta se podría obtener con un número infinito de valores (p_1, p_2, p_3) –tenemos una ecuación y 3 incógnitas. *¿Cuál función de distribución $p_1, \ldots, p_K$ debemos de escoger para representar las elecciones de las agentes?*

Aquí introducimos el *principio de maximización de la entropía* propuesto por E.T. Jaynes (1957). Como un desarrollo del principio de la razón insuficiente de Laplace en situaciones donde el conjunto de información va más allá de $p_k \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{K} p_k = 1$, Jaynes argumenta que, dentro de todas las funciones de probabilidad que satisfacen las restricciones que representan a un conjunto de información inicial, escoger a la función de probabilidad que maximiza la entropía nos brinda una solución (una función de probabilidad) que además de ser la menos sesgada[15] es también la que refleja nuestro estado de conocimiento sobre el fenómeno bajo estudio –representado por la información inicial.

Se trata pues de un método de inferencia. Si al representar a la teoría de un fenómeno con el estado de espacios y una serie de restricciones (hipótesis teóricas) vemos que esta función de probabilidad resultante no es consistente con las observaciones esto no significa que el método de estimación es deficiente, sino que las hipótesis de la teoría, i.e., las restricciones utilizadas, no son las relevantes para explicar el fenómeno de estudio. Por tanto, debemos aprender y cambiar nuestro estado de conocimiento.

6. El comportamiento de las agentes: el modelo logit-QRSE

Armados con la información inicial y una metodología de inferencia, podemos buscar a esta función de probabilidad $p_1^*, \ldots, p_K^*$. El modelo QRSE encuentra la solución $p^*[a_1|x],\ p^*[a_2|x], \ldots, p^*[a_K|x]$ resolviendo el siguiente programa de maximización

$$(6) \qquad \underbrace{\text{Max}}_{\{p_1,\ldots,p_K\}\geq 0} \quad \sum_{k=1}^{K} p_k u[a_k; x]$$

$$(7) \qquad \text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{K} p_k = 1$$

$$(8) \qquad -\sum_{k=1}^{K} p_k \ln p_k \geq H_{\min}.$$

Es decir, tomando como dados a las K diferentes $u[a_k; x]$, buscamos maximizar la utilidad esperada de la agente escogiendo $p[a_k|x]$ que cumplan tanto con la condición de normalización (7) como con el requisito de incertidumbre mínima $0 \leq H_{\min} \leq H_{\max} = \ln K$. Al ser H una función cóncava y $E[u]$ una función lineal en p_k, entonces condiciones necesarias y suficientes para resolver el programa (6)-(8) consisten en resolver al sistema de ecuaciones resultado de las condiciones de primer orden (CPO) de la función auxiliar de Lagrange[16]

15 Es la menos sesgada puesto que escoger otra distribución con una entropía menor que la máxima implica que se está considerando información adicional que no se ha hecho explícita. Véase Kapur y Kesavan (1992, capítulo 1).

16 Kapur y Kesavan (1992) muestran en la sección 2.4.8 que nos es necesario introducir restricciones adicionales para la no negatividad de las probabilidades $p_k \geq 0$. En la sección 2.4.9 estos autores muestran que podemos remplazar la restricción de desigualdad en (8) con una de igualdad sin alterar las propiedades de la solución.

(9)

$$\mathscr{L}(p_k,\lambda,T):=\sum_{k=1}^{K}p_k u[a_k;x]-\lambda\left(\sum_{k=1}^{K}p_k-1\right)+T\left(-\sum_{k=1}^{K}p_k\ln p_k-H_{\min}\right)$$

donde λ y T son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones (7) y (8) respectivamente. La primera CPO es

(10)

$$\frac{\partial\mathscr{L}(p_k,\lambda,T)}{\partial p_k}=0\rightarrow u[a_k;x]-\lambda-T(\ln p_k+1)=0$$

por lo que si resolvemos para Inp_k y p_k tenemos, para k=1,...,K,

(11) $$\ln p_k=\frac{u[a_k;x]-\lambda+T}{T}=\frac{u[a_k;x]}{T}-\frac{\lambda+T}{T}$$

(12) $$p_k=e^{\frac{u[a_k;x]-\lambda+T}{T}}=e^{\frac{u[a_k;x]}{T}}e^{-\frac{\lambda+T}{T}}$$

La segunda CPO es

(13) $$\frac{\partial\mathscr{L}(p_k,\lambda,T)}{\partial\lambda}=0\rightarrow 1=\sum_{k=1}^{K}p_k$$

por lo que insertando (12) en (13) obtenemos

$$\sum_{k=1}^{K}e^{\frac{u[a_k;x]}{T}}e^{-\frac{\lambda+T}{T}}=e^{-\frac{\lambda+T}{T}}\sum_{k=1}^{K}e^{\frac{u[a_k;x]}{T}}\text{ y}$$

(14) $$e^{\frac{\lambda+T}{T}}=\sum_{k=1}^{K}e^{\frac{u[a_k;x]}{T}}$$

(15) $$\frac{\lambda+T}{T}=\ln\sum_{k=1}^{K}e^{\frac{u[a_k;x]}{T}}.$$

Con (14) podemos eliminar la dependencia de p_k en λ en la ecuación (12) y obtener para k=1,...,K la famosa distribución de Gibbs

(16) $$p^*[a_k|x]=\frac{e^{\frac{u[a_k;x]}{T}}}{\sum_{k=1}^{K}e^{\frac{u[a_k;x]}{T}}}$$

obtenida originalmente dentro del contexto de la mecánica estadística.

La solución (15) nos dice que la probabilidad de la acción a_k depende del pago que las agentes esperan obtener de la acción a_k, i.e., $u[a_k;x]$, así como del parámetro T, que dentro de la literatura del modelo QRSE se le conoce como *la temperatura del comportamiento (behavioral temperature)*–esto debido a su relación con los problemas analizados en la mecánica estadística. Este parámetro T, que como veremos depende del nivel de entropía $H_{\min}$, lo podemos interpretar como el estado de confianza que las agentes tienen sobre el mercado. Así, la probabilidad de las acciones depende tanto de las expectativas sobre x como de la incertidumbre, por lo que podemos interpretar a $p^*[a_k;x]$ como el estado de las expectativas de largo plazo.

Para mostrar la dependencia del parámetro T al nivel de entropía mínimo $H_{\min}$, obtengamos la tercera CPO:

(17)

$$\frac{\partial\mathscr{L}(p_k,\lambda,T)}{\partial T}=0\rightarrow 0=H_{\min}-\sum_{k=1}^{K}p_k^*\ln p_k^*$$

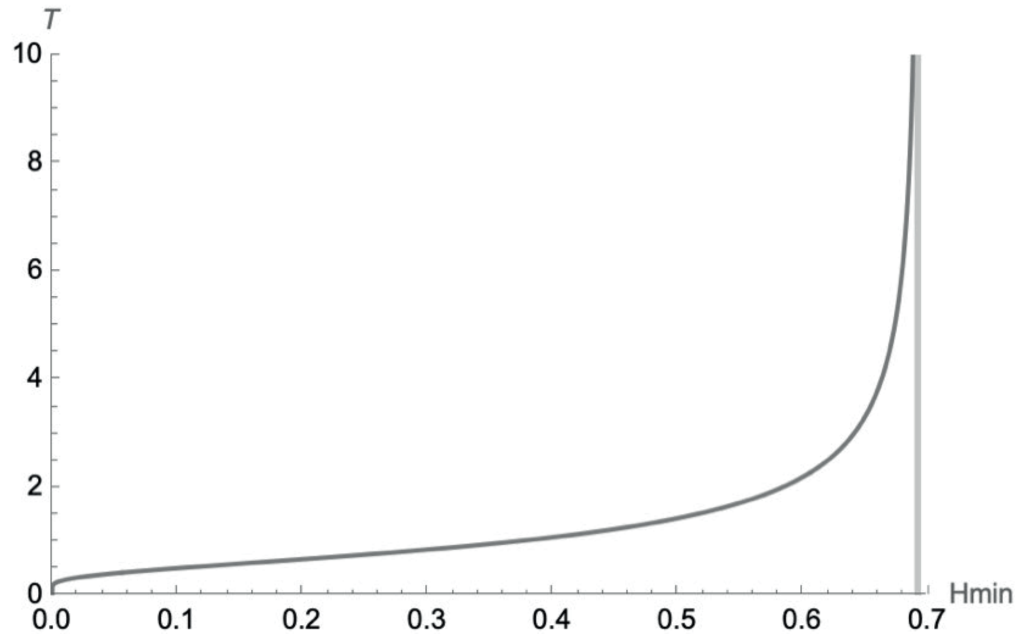
Si ahora insertamos (11) y (15) en (17) obtenemos directamente la restricción

(18)

$$0=\mathrm{H}_{\min}-\sum_{k=1}^{K}\frac{e^{\frac{u[a_k;x]}{T}}}{\sum_{k=1}^{K}e^{\frac{u[a_k;x]}{T}}}\left(\frac{u[a_k;x]}{T}-\ln\frac{u[a_k;x]}{T}\right).$$

Si bien una solución analítica de T como función de $H_{\min}$ puede ser algo complicado de obtener, el gráfico 4 muestra la relación existente entre T y $H_{\min}\in[0,H_{\max}]$ para el caso de una probabilidad dicotómica y una función de pago dada.

Gráfica 4 Multiplicador de Lagrange T como función de la entropía mínima H_{min} para K=2 (H_{max} = ln $K \approx 0.69$) y $u[a_k;2] = 2 \cdot a_k$



Con los resultados obtenidos del modelo QRSE, analicemos las elecciones de las agentes bajo las diferentes condiciones de incertidumbre.

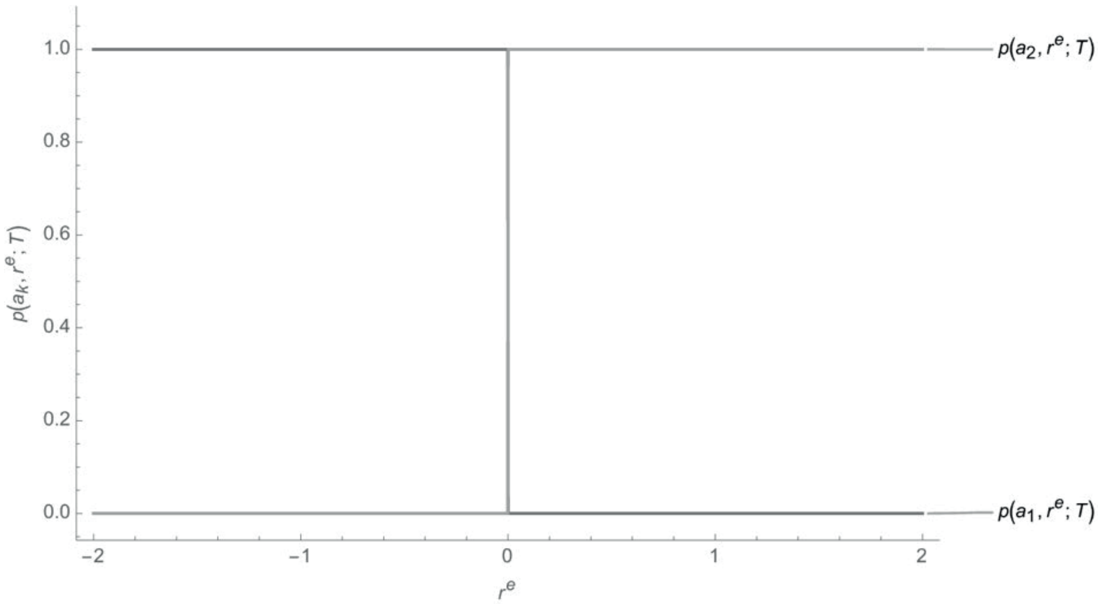
7. La toma de decisiones sin incertidumbre.

Supongamos una situación donde no existe incertidumbre en el mercado, es decir, $H_{\min} = T = 0$. Como lo vimos en la sección 4, la función de entropía solo puede alcanzar un valor igual a cero si y solo si alguna a_k tiene probabilidad igual a uno, p_k=1, y el resto una probabilidad nula, $p_{l \neq k} = 0$ para l=1, ...,K y $l \neq k$. Pero tenemos K posibles acciones para los cuales, de manera excluyente, podemos tener p_k= 1. ¿Cuál acción escogerá la/el agente?

La respuesta es aquella acción, con probabilidad igual a 1, con la que se alcance la mayor utilidad, la cual corresponderá a la mayor utilidad esperada. El gráfico 5 muestra esta situación para el caso de una probabilidad dicotómica y una función de pago $u[a_k; x] = a_k x$. Vemos que cuando $x < 0$ realizar la acción $a_2 = 1$ traería una utilidad negativa por lo que esta acción se realiza con $p_2 = 0$ y, en cambio, la acción $a_1 = 0$ se realiza con $p_1 = 1$ ya que es la que genera la utilidad máxima: $u[a_1 = 0, x < 0] = 0$. Y lo contrario sucede cuando $x > 0$: como $u[a_2 = 1, x > 0] > 0$ y $u[a_1 = 0, x > 0] = 0$ entonces p_1= 0 y p_2 = 1. De esta manera, cuando no hay incertidumbre *no hay una estrategia mixta.*

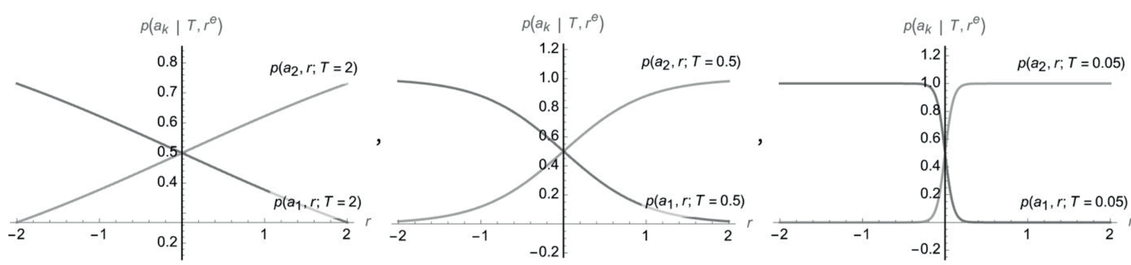
Gráfica 5

Toma de decisiones para el caso de elección dicotómica $K = 2$ y $u\ [a_k;x] = a_k x$. El caso sin incertidumbre, $T = 0$.



Gráfica 6

Toma de decisiones para el caso de elección dicotómica $K = 2$ y $u\ [a_k;x] = a_k x$. El caso con incertidumbre, $T = \{2, 0.5, 0.05\}$.



8. La toma de decisiones con incertidumbre

¿Qué cambios surgen cuando existe una entropía positiva, $H_{\min} > 0$? La existencia de un nivel de incertidumbre positivo implica que el/la agente realizará una estrategia mixta. Más aun, la distribución solución (16) muestra que cada acción se realizará con una probabilidad positiva. De esta manera, aunque una acción conlleve una pago esperado negativo, la incertidumbre que experimentan las agentes les hará asignar una probabilidad positiva, aunque sea muy pequeña, a cada una de las acciones. Este resultado constituye el principal cambio cualitativo respecto a la situación de cero entropía. El gráfico 6, muestra estos resultados para el caso para una elección dicotómica –como verá, se trata del modelo *logit*, construido con un marco alternativo.

Respecto a los cambios cuantitativos, la comparación de las seis distribuciones en el gráfico 6 nos indica claramente que, para un valor de la función de pago, a mayor incertidumbre la elección por parte de las agentes será favoreciendo la diversificación de sus acciones. Note que cuando la función de pago es cero, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$, es decir, tendremos una distribución uniforme en las acciones.

9. El comportamiento de las agentes: dualidad entre la teoría y la incertidumbre de la investigadora

Veamos cómo el supuesto de maximización de la utilidad esperada por parte de la agente y del nivel de incertidumbre mínima no es otra cosa más que una representación de la estrategia de modelación de la investigadora social donde toma como información inicial la restricción de que las agentes eligen sus estrategias buscando obtener un nivel de utilidad esperada mínimo y el criterio de elegir a la función de probabilidad condicional $p[a_k|x]$ que maximice la entropía respetando a dicha información inicial.

Por las propiedades de dualidad de la función objetivo (6)y de la restricción (8) se puede demostrar[17] que, si ahora *maximizamos a la entropía* sujeta a las restricciones de normalización y de una utilidad esperada mínima,

$$\text{(19)} \qquad \underbrace{\text{Max}}_{\{p_1,\ldots,p_K\}\geq 0} \; -\sum\nolimits_{k=1}^{K} p_k \ln p_k$$

$$\text{(20)} \qquad \text{s.t.} \quad \sum\nolimits_{k=1}^{K} p_k = 1$$

$$\text{(21)} \qquad \sum\nolimits_{k=1}^{K} p_k u[a_k; x] \geq U_{\min},$$

el cual tiene a la función auxiliar de Lagrange

(22)

$$\mathscr{L}(p_k, \alpha, \beta) = -\sum\nolimits_{k=1}^{K} p_k \ln p_k - \alpha\left(\sum\nolimits_{k=1}^{K} p_k - 1\right) + \beta\left(\sum\nolimits_{k=1}^{K} p_k u[a_k, x] - U_{\min}\right),$$

obtenemos la misma solución $p^*[a_k|x$ en (16) y, además, $\beta = \frac{1}{T}$. Es decir, entre mayor sea el nivel de incertidumbre que aqueja a la agente, la importancia del nivel de utilidad esperada mínimo tendrá un impacto menor: conforme $T \to \infty$ entonces $\beta \to 0$ y la restricción (21) tiende a no ser relevante en la reducción de la entropía y la agente optará por una estrategia mixta donde las acciones tenderán a tener probabilidades uniformes, $p_k \to \frac{1}{K}$ –la entropía será máxima. En caso contrario, cuando la importancia de la utilidad esperada mínima tiende a ser infinitamente grande entonces la incertidumbre tiende a desaparecer y la agente optará por una estrategia única.

Referencias

Brennan, M.J. (1987). Capital Asset Pricing Model, en Eatwell, J., Milgate, M., Newman, P. (eds) *Finance. The New Palgrave. Palgrave* Macmillan, Londres.

Capraro, S., C. Panico y K.J. Sandoval (2020) *Economía Monetaria*, Facultad de Economía, UNAM.

17 Véase Scharfenaker y Foley (2017, sección 2.1).

Coronado, J.A. (2018) *An Information Constrained Model for Ultimatum Bargaining,* Working Paper 15/2018 Department of Economics The New School for Social Research, November.

Dutt, A.K. y E. Amadeo (1993) *Keynes's Third Alternative?: The Neo-Ricardian Keynesians and the Post Keynesians,* New Directions in Modern Economics Series, Edward Elgar.

Foley, D. K. (2020). Information theory and behavior. The European Physical Journal Special Topics, 229(9):1591-1602.

Garegnani, P. (1976) "On a Change in the Notion of Equilibrium in Recent Work on Value and Distribution", en M. Brown, K. Sato y P. Zarembka (ed.), *Essays in Modern Capital Theory,* Amsterdam: North Holland, pp. 25-45.

Golan, A. (2018) *Foundations of Info-metrics: Modeling, inference, and imperfect information.* Oxford University Press, New York, NY.

Jaynes, E.T. (1957) Information theory and statistical mechanics. *The Physical Review*, 106(4): 620-630.

Keynes, J. M. (1921[1973]), A Treatise on Probability, en Moggridge D.E., (ed), *The Collected Writings of J.M. Keynes*, Vol. VIII, Londres: Macmillan.

Keynes, J. M. (1930[2013]), A Treatise on Money: The Pure Theory of Money, en Moggridge D.E., (ed), *The Collected Writings of J.M. Keynes*, Vol. V, Londres: Macmillan.

Keynes, J. M. (1936[1971]), The General Theory of Employment, Interest and Money, en Moggridge D.E., (ed), *The Collected Writings of J.M. Keynes,* Vol. VII, Londres: Macmillan.

Kapur, J.N. y H.K. Kesavan (1992) *Entropy Optimization Principles with Applications.* Academic Press Inc., San Diego, USA .

Machina, M.J. (1987a). Choice Under Uncertainty: Problems Solved and Unsolved. *Economic Perspectives* 1(1): 121–154

Machina, M.J. (1987b). Expected Utility Hypothesis, en Eatwell, J., Milgate, M., Newman, P. (eds) *Utility and Probability. The New Palgrave.* Palgrave Macmillan, Londres.

Ömer, Ö. (2018). Dynamics of the us housing market: a quantal response statistical equilibrium approach housing market: a quantal response statistical equilibrium approach. *Entropy* 20(11).

Ramsey, F.P. (1931) *The foundations of mathematics and other logical essays,* R.B. Braitwaite, Londres: Kegan, Paul, Trench, Trubner & Co, Nueva York: Harcourt, Brace and Company.

Scharfenaker, E. Implications of quantal response statistical equilibrium, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 119, https://doi.org/10.1016/j.jedc.2020.103990.

Scharfenaker, E. y D.K. Foley (2017) Quantal response statistical equilibrium in economic interactions: theory and estimation. *Entropy* 19(444).

Scharfenaker, E. y D.K. Foley (2021a) *Unfulfilled expectations and labor market interactions: A statistical equilibrium theory of unemployment.* Technical report, University of Utah, Department of Economics.

Schmeidler & Wakker (1987) Expected Utility and Mathematical Expectation, en Eatwell, J., Milgate, M., Newman, P. (eds) *Utility and Probability. The New Palgrave.* Palgrave Macmillan, Londres.

Shannon, C. (1948) A Mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal,* Vol. XXVII(3), pp. 379-423.

Smith, A. (1776[1996]) *La riqueza de las naciones (Libros I-II-III y selección de los Libros IV y V).* El Libro de Bolsillo, Alianza Editorial, Madrid.

Tobin, J. (1958). Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, *The Review of Economic Studies,* 25(2): pp. 65-86.

von Neumann, J. y O. Morgenstern (1944[1953]), *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton, NJ. Princeton University Press.

Yang J. (2018) A Quantal Response Statistical Equilibrium Model of Induced Technical Change in an Interactive Factor Market: Firm-Level Evidence in the EU Economies. *Entropy*. 2018; 20(3).

Yang, J. (2022). Information-theoretic model of induced technical change: Theory and empirics. *Metroeconomica*, 1-38. https://doi.org/10.1111/meca.12399.