

Sobre la validez del supuesto de uniformidad en las tasas de plusvalía sectorial desde la teoría de las probabilidades

On the validity of the assumption of uniformity in sectoral rates of surplus value from the perspective of probability theory

José Mauricio Gómez Julián

Universidad Latina de Costa Rica

Correo electrónico: jose.gomez28@ulatina.net

(Recibido: 15/02/2022. Aceptado para publicación: 18/09/2022)

DOI: [10.22201/fe.24484962e.2022.11.17.2](https://doi.org/10.22201/fe.24484962e.2022.11.17.2)

RESUMEN

El supuesto de uniformidad en las tasas de plusvalía sectorial se encuentra implícito en todo análisis marxista de la tasa media de ganancia que no tome explícitamente en consideración las diferencias en el grado de explotación de la fuerza de trabajo entre los diferentes sectores productivos. La validez de este supuesto, establecido por Adam Smith y elevado al grado de ley económica central en el marco teórico de Marx, ha sido cuestionada tanto desde posiciones marxistas como desde otras posiciones. Esta investigación analiza la consistencia lógica de tal supuesto, en términos de variedades no clásicas, de la ley de los grandes números tanto en su versión débil como fuerte, así como también examina, descriptiva e inferencialmente, el comportamiento empírico de las tasas de plusvalía sectorial en la economía estadounidense durante el periodo 1960-2020. Los resultados teóricos y aplicados arrojan evidencia a favor de la validez de este supuesto.

ABSTRACT

The assumption of uniformity in sectoral rates of surplus value is implicit in all Marxist analyses of the average rate of profit that do not explicitly take into consideration the differences in the degree of labor exploitation among different productive sectors. The validity of this assumption, established by Adam Smith and elevated to the status of a central economic law within Marx's theoretical framework, has been questioned both from Marxist and other perspectives. This research examines the logical consistency of such an assumption in terms of non-classical varieties of the law of large numbers, both in its weak and strong versions, while also descriptively and inferentially analyzing the empirical behavior of sectoral rates of surplus value in the U.S. economy during the period 1960-2020. The theoretical and applied results provide evidence in favor of the validity of this assumption.

© 2022 Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Economía. Este es un artículo *Open Access* bajo la licencia [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

Palabras clave: tasa media de ganancia, ley de los grandes números, marxismo, tasa de plusvalía uniforme, análisis sectorial.

Clasificación JEL: B12, B14, C02, D46.

Keywords: Average rate of profit, law of large numbers, Marxism, uniform surplus value rate, sectoral analysis.

JEL Classification: B12, B14, C02, D46.

1. INTRODUCCIÓN

En su estudio sobre los precios de producción, Marx (2010, pp. 161-177) parte del supuesto de uniformidad de las tasas de plusvalía¹ de los diferentes sectores económicos (UTP). Desde entonces, han surgido críticas desde diferentes sectores a este postulado.

Marx (2010, p. 150) antes había fundamentado este supuesto haciendo referencia a que Adam Smith había mostrado cómo las tasas de plusvalía sectorial se tienden a equiparar, fuese esto por factores estrictamente vinculados a la dinámica económica capitalista, fuese por factores culturales o fuese por ambos.

Como señala Cogliano (2021, p. 1), el postulado de tendencia hacia la UTP planteado por Smith es elevado a la categoría de ley económica central en la economía política marxista. Sin embargo, para comprender por qué Marx aceptó gnoseológicamente el postulado ontológico planteado por Smith desde su observación empírica de la dinámica del mercado de trabajo, al igual que para comprender todas las demás afirmaciones ontológicas de Marx junto con su fundamento gnoseológico inherente, debe tomarse en consideración no sólo los hechos crudos sino también que los planteamientos de Marx están impulsados por una versión materialista de la lógica de Hegel. La lógica

de Hegel es una lógica de la totalidad, lo que implica la consideración del largo plazo y/o una aproximación a la totalidad de los elementos que componen al fenómeno estudiado,² sea este de índole económica u otra índole. En esta investigación se condensará bajo la noción de régimen asintótico el largo plazo y/o un número de variables de estudio “lo suficientemente grande”.

Las consideraciones gnoseológicas señaladas son relevantes por cuanto la gnoseología o teoría del conocimiento de Marx no es la del empirismo, por lo cual no resulta natural que acepte la evidencia empírica simplemente en su calidad de hecho empírico (los “hechos crudos”). Su teoría del conocimiento es la de lo concreto racionalizado en términos del marco lógico de la dialéctica (Dussel, 1985, pp. 49-54), que difiere también de forma sustancial del racionalismo y sus variantes por cuanto no se limita a ser una expresión abstracta de los empíricos que no necesariamente está rigurosamente sujeta a ellos. Esta racionalización implica la unificación lógica de lo ontológico y lo gnoseológico. Todo esto debe tomarse en consideración cuando se discute sobre si un planteamiento tiene un genuino espíritu marxista o no.

En estadística matemática, el análisis de largo plazo y/o de la totalidad es equivalen-

¹ En términos de la contabilidad macroeconómica moderna esto equivale al cociente entre el excedente bruto de operación y las remuneraciones de los trabajadores.

² Si son series temporales se deberá considerar un periodo de tiempo “lo suficientemente grande”; si son datos de sección cruzada, un número de elementos “lo suficientemente grande”, y si son datos de panel, tanto el periodo como el número de unidades de estudio deberá ser “lo suficientemente grande”.

te al análisis de las variables aleatorias³ en régimen asintótico, mientras que en estadística aplicada equivale al análisis de variables cuya muestra es lo suficientemente grande. ¿Qué tamaño de muestra es “lo suficientemente grande”? La respuesta dependerá del fenómeno concreto analizado y puede determinarse mediante estudios Monte Carlo que permitan determinar con qué tamaños de muestra se cumplen (o no) parcial o totalmente las propiedades estipuladas para régimen asintótico. Por ejemplo, en el caso de la detección de raíces unitarias en series de tiempo económicas [especialmente el producto interno bruto (PIB) y la inflación], Perron y Ng (1996, p. 449) y Schwert (1989, p. 153) establecen que una muestra con entre 25 y 200 observaciones es pequeña, menor a 500 es moderada y entre 500 y mil puede considerarse como grande. Un postulado equivalente es que el tamaño de la muestra sea razonablemente próximo al tamaño de la población, sin embargo, para poblaciones pequeñas esta equivalencia no necesariamente existe.

Las nociones anteriores están vinculadas con la siguiente pregunta: ¿qué son exactamente los precios de producción? Como señalan Carchedi y de Haan (1995, p. 29):

La expresión “los precios de mercado fluctúan en torno a los precios de producción” o “los precios de mercado tienden hacia los precios de producción” podría interpretarse como si los precios de mercado fluctuaran en torno a los precios de producción preexistentes o tendieran a hacerlo. Pero esto no es lo que se quiere decir aquí. Tan pronto como se forman los precios de mercado estos empiezan a ser

³ De ahora en adelante, se usará r.v.s. para hacer referencia a las variables aleatorias, mientras que para hacer referencia únicamente a una se utilizará r.v.

presionados hacia los precios de producción debido a la competencia tecnológica y a los movimientos de capital. Esto implica que los precios de mercado existen antes que los precios de producción, puesto que estos últimos existen únicamente porque y en la medida que los precios de mercado tienden hacia un promedio de sí.

Estos precios tienen en la base la uniformidad (o la tendencia a ella) de las tasas de plusvalía sectorial, lo que muestra la relevancia de determinar si el supuesto analizado en esta investigación se verifica o no.

En consonancia con la lógica antes expuesta, el primer teorema fundamental de la estadística matemática o ley de los grandes números (LGN) implica en su versión fuerte una convergencia casi asegurada: que, al considerar un número de sectores lo suficientemente grande, la probabilidad de que la tasa de plusvalía promedio de cualquiera de estos sea igual al valor esperado⁴ global es 1, es decir,

$$\Pr\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n = \mu\right) = 1$$

Por su parte, la versión débil implica convergencia en probabilidad: que, al considerar un número de sectores lo suficientemente grande, la probabilidad de que la tasa de plusvalía promedio de cualquiera de los sectores productivos diverja en una cantidad arbitrariamente pequeña del valor esperado global es 1, esto es,

⁴ La suma del producto de los eventos y su probabilidad de ocurrencia. Este es el primer momento de probabilidad de una distribución. Para el caso analizado, la probabilidad de ocurrencia de cada tasa de plusvalía sectorial será para todas $1/n$. Esto implica que el primer momento de probabilidad será equivalente al promedio simple o media aritmética.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|\bar{Y}_n - \mu| < \epsilon) = 1$$

La LGN, sea en su versión fuerte (LFGN) o débil (LDGN) establece como requisito que las variables aleatorias sean independientes y que la distribución de probabilidad de tales variables sea idéntica, lo cual evidentemente no se cumple en rigor por la interrelación sectorial existente en el marco de la competencia capitalista (esto viola la independencia), así como también a las características específicas de los procesos productivos (esto viola la identidad en distribución). Sin embargo, esto puede ocurrir bajo condiciones más flexibles que las establecidas en la postulación clásica de la ley (variables independientes, idénticamente distribuidas y real-evaluadas). Debe señalarse que los teoremas que flexibilizan los requisitos exigidos por ambas versiones de la LGN son de carácter local, lo que significa que su validez general está circunscrita a condiciones concretas del conjunto de datos analizado.

2. METODOLOGÍA

El tipo de investigación realizada es tanto de carácter teórico como aplicado, puesto que el supuesto de UTP se estudia desde el primer teorema fundamental de la teoría de las probabilidades, desde el comportamiento genético concreto del mercado de trabajo teorizado por Smith y Marx, y desde los instrumentos estadísticos descriptivos e inferenciales relativos al ajuste de distribución de probabilidad, la independencia lineal, la significancia de las diferencias entre medias/medianas de las tasas de plusvalía sectorial y el comportamiento descriptivo de tales diferencias.

Por consiguiente, la investigación también es de carácter exploratorio, descriptivo y explicativo. Es cuantitativa, longitudinal y

no-experimental, puesto que se fundamenta en la observación cuantitativa de la tasa de plusvalía en los diferentes sectores a lo largo del periodo 1960-2020 y su comportamiento no es controlado durante la investigación. Adicionalmente, es inductiva porque a partir de evidencia puramente teórica, evidencia empírica teorizada y la evidencia arrojada por el análisis estadístico de las tasas de plusvalía sectorial se establece la validez del principio general de la uniformidad asintótica implícito en esta evidencia de diversa naturaleza, mientras que es deductiva por cuanto busca la verificación o falsación del supuesto de uniformidad sectorial asintótica de la tasa de plusvalía y a partir de ello describir la validez del supuesto en determinados casos particulares a la luz de las condiciones establecidas para su cumplimiento.

Los datos fueron recolectados descargando de la Oficina de Análisis Económico de los Estados Unidos (BEA, U.S. Bureau of Economic Analysis) las estadísticas macroeconómicas relativas al excedente bruto de operación (que representa el tiempo de trabajo excedente) y las remuneraciones de los trabajadores (que representa el tiempo de trabajo necesario) en la economía estadounidense durante el periodo 1960-2020 y dividiendo tal excedente entre las remuneraciones referidas para obtener la tasa de plusvalía de los diferentes sectores. Tales estadísticas se encuentran en el sitio web de la BEA correspondiente a las cuentas macroeconómicas integradas en formato de tablas de datos interactivas.

Partiendo de tales datos, se verifica la existencia de tres listas que enumeran tales actividades para el periodo en cuestión. Así, el primer paso que debe realizarse es expresar todas las actividades económicas de cada periodo en las actividades económicas del primer periodo. Tras esto, deben seleccionar-

se los sectores que serán considerados como productivos, pues son estos los que entran en el cómputo de la tasa media de ganancia del sistema y el supuesto de tendencia hacia la UTP es relevante en la medida que fundamenta la existencia de una tasa media de ganancia que aplica uniformemente a los sectores (formada tras la competencia capitalista entre capitales cuyas tasas de ganancia iniciales son no uniformes) y, con ello, fundamenta también la existencia de los precios de producción.

Siguiendo a Tregenna (2009, p. 1), esto dependerá de su localización en el circuito del capital y de su relación con la producción de plusvalía. El sector servicios, según Tregenna (2009, p. 1), incluye actividades muy heterogéneas en términos de los dos puntos anteriores porque existen actividades en las que se produce directamente plusvalía, existen actividades que facilitan la producción de plusvalía en otros lugares (o aumentan la tasa a la que se produce) y existen actividades que permanecen fuera del circuito del capital. Tomando los datos de Gómez Julián (2023), para definir cuáles actividades económicas complementarias son indispensables para tales fines, se parte del desglose de las mismas, presentado según la Oficina de Administración del Presupuesto de Estados Unidos (Office of Management of Budget, 2022), y de las definiciones de plusvalía de Borisov, Zhamin y Makarova (2009, p. 46-47), de la diferencia entre consumo productivo e improductivo (Marx, 1975, p. 223) y de que la evidencia teórica general indica que los servicios en rigor, entendidos como actividades terciarias (aquellas que no se intercambian inmediatamente por capital, sino por ingresos, con la expectativa de producir plusvalía en lugar de valor de uso, es decir, trabajo en el vínculo inmediato antes del consumo final o que proporciona los

medios adecuados para el consumo final), no son actividades en que se desempeñe trabajo productivo en el sentido marxista (Marx, 1969, pp. 403-404; Watanabe, 1991, pp. 26-28; Gao y Watanabe, 2023, p. 34).

Se hicieron ajustes de distribución con el método de máxima log-verosimilitud para verificar si la distribución de probabilidad de la tasa de plusvalía en los diferentes sectores era la misma, pruebas de correlación de Pearson entre sectores para verificar su independencia lineal por pares y luego se calcularon el promedio y la mediana de los resultados.

Para complementar el análisis numérico de la verificación (o no) de la LGN en el caso de las tasas de plusvalía sectorial, se analizaron las diferencias entre las medias/medianas de las tasas de plusvalía sectorial y la media/mediana global.

No se presentan los resultados de la realización de pruebas de significancia de las diferencias entre las medias/medianas de las tasas de plusvalía sectorial (la validez de estos resultados está sujeta a que sigan la misma distribución y/o que sean linealmente independientes, y usa la media como parámetro de localización) contra la media/mediana global (la prueba t de Student exige la misma distribución, sean las muestras linealmente independientes o no, mientras que la prueba de Wilcoxon puede o no requerir independencia lineal⁵ y usa la mediana como parámetro de localización, pero si las varia-

⁵ La prueba de suma de rangos de Wilcoxon, conocida también como prueba U de Mann-Whitney (porque llevaron al grado máximo de generalidad el estadístico U planteado por Wilcoxon), exige que las variables sean linealmente independientes (muestras no-pareadas). Por su parte, la prueba de rangos con signo de Wilcoxon permite que las variables sean linealmente dependientes (muestras pareadas), pero exige a cambio que las muestras sujetas al análisis sean del mismo tamaño (lo mismo ocurre en el caso de la prueba t de Student para muestras pareadas).

bles son linealmente dependientes deben ser del mismo tamaño), todas robustecidas usando *bootstrapping*, por diferentes razones.

En primer lugar, para el caso de la prueba *t* de Student, las nuevas muestras construidas vía *bootstrapping* no se distribuyen normalmente puesto que son isometrías de la muestra original, lo que implica que las distancias se conservan y, por consiguiente, es lógico presuponer que la distribución se mantiene inalterada, lo que significa que el supuesto de normalidad algunas veces exigido por esta prueba sigue sin cumplirse. En segundo lugar, si bien es cierto que el Grupo 1 (sector) y Grupo 2 (economía global) se vuelven independientes al aplicar *bootstrapping*,⁶ estas pruebas están diseñadas para comparar una muestra contra otra, no una muestra contra un conjunto de muestras.

Como se verá en la sección relativa a las pruebas de independencia lineal, las tasas de plusvalía sectorial no son linealmente independientes y esto se explica teóricamente en términos de que la dinámica económica es un proceso que intrínsecamente vincula a los sectores económicos. Puesto que las pruebas de significancia estadística señaladas exigen que las variables de la sucesión sean independientes, esto es, que la independencia se cumpla no sólo para la variable medida (que en este caso tiene asignada la etiqueta de grupo '1') frente al conjunto de variables (que en este caso tiene asignado la etiqueta de grupo '2'), sino también entre todas las variables que componen la sucesión, el método Bootstrap también es insuficiente para garantizar que los resultados de las pruebas de significancia sean estadísticamente

válidos. Sin embargo, debe señalarse que los resultados indicaron que las diferencias evaluadas eran significativas.

¿Cómo se sostiene que la independencia de las variables que conforman una sucesión es requerida en el contexto de las pruebas de hipótesis? Por un lado, es conocido que no existen pruebas de hipótesis para muestras pareadas cuando las muestras son de diferente tamaño (como es el caso en el presente análisis), por la imposibilidad de realizar un emparejamiento entre las observaciones de las dos muestras. Por otro lado, a pesar de la dificultad para ofrecer una demostración universal (general sin excepciones) del requerimiento de independencia entre los miembros de la sucesión en el contexto referido, puede hacerse un compendio lo suficientemente grande de casos específicos en que esto es requerido, con base en Lehmann (1959) y otras fuentes.

Así, la distribución binomial exige independencia entre observaciones (Lehmann, 1959, p. 2), igualmente la distribución de Poisson (Lehmann, 1959, p. 3), la distribución binomial negativa II (Lehmann, 1959, p. 21), la distribución uniforme (Lehmann, 1959, p. 26), la distribución multinomial (Lehmann, 1959, pp. 50-51), la distribución binomial negativa I (Lehmann, 1959, p. 70), también un proceso de Poisson exige independencia entre los tiempos observados (Lehmann, 1959, p. 71), una prueba UMP (*Uniformly Most Powerful*) exige independencia de los ensayos (p. 111) —puesto que una UMP tiene la mayor potencia estadística del conjunto de todas las hipótesis alternativas posibles del mismo tamaño α , las pruebas de potencia exigen independencia entre los ensayos—, la familia binomial exige independencia entre observaciones (Lehmann, 1959, p. 131), un análisis conjunto de pruebas de significancia exige que los experimentos

.....
⁶ Debe señalarse que la dependencia de las variables que componen al grupo 2 (en caso exista) no se ve afectada por la técnica, por lo que tales resultados no pueden considerarse válidos. Esto se explicará a continuación.

que originaron a cada uno sean independientes (Lehmann, 1959, p. 150), y la suma total de cuadrados exige independencia de media de la variable (Lehmann, 1959, p. 162). Adicionalmente, McCullagh y Nelder (1989, p. 5) señalan que la estimación de la norma L_2 exige que las observaciones sean independientes o de alguna forma intercambiables, y lo mismo ocurre para toda norma L_p apropiada como medida de discrepancia. La regresión logística exige que las observaciones sean independientes (Statistics Solutions, 2023a), las distribuciones conjuntas (si cada variable aleatoria se considera una observación) exigen que tales observaciones sean independientes entre sí (Cross Validated, 2014), lo mismo ocurre con el ANOVA (Statistics Solutions, 2023b) y los ensayos en la distribución normal (Grinstead y Snell, 2023, p. 9.2.1).

Por lo tanto, siguiendo el hecho de que toda prueba de hipótesis requiere algún tipo de distribución (especialmente binomial y normal), la presencia generalizada de ANOVA y de las pruebas de potencia en las pruebas de hipótesis y el hecho de que no existen pruebas de hipótesis para muestras pareadas de diferente tamaño, al menos es posible concluir que la independencia de las observaciones es generalmente (no necesariamente siempre) requerida en las pruebas de hipótesis. Por ende, considerando a las variables aleatorias como generalizaciones de las observaciones, es posible afirmar que en las pruebas de hipótesis es habitualmente requerida la independencia de las variables aleatorias que conforman la sucesión.

La conclusión anterior está reforzada (en el sentido que se extiende el alcance de su generalización) dada la omnipresencia implícita de las normas L_p (especialmente de la L_1 y L_2) como medidas de discrepancia, como se muestra a continuación.

En espacios euclidianos (los espacios que representan las nociones cotidianas de espacio que tenemos y que es el espacio asumido en muchas pruebas de hipótesis) y espacios de Hilbert [el análisis de variables aleatorias con varianza finita en espacios de probabilidad implica que estos espacios de probabilidad son espacios de Hilbert (Zimmerman, 1975, p. 395)], que son sus generalizaciones naturales a infinitas dimensiones, la métrica (la función que mide las distancias entre objetos) se deduce a partir de la norma (que mide la longitud de un objeto y que se usa en estadística como medida de discrepancia) y, por consiguiente, si la norma exige independencia lineal entre observaciones, ese supuesto se implica automáticamente en la métrica o función distancia.⁷

Lo mismo ocurre en otros espacios utilizados en el contexto de la teoría de las probabilidades, como son los espacios de Borel o espacios L_1 (Kolmogórov y Fomin, 1978, p. 418), en espacios L_2 (Kolmogórov y Fomin, 1978, p. 418) y en espacios de Banach (Mathematics, 2015 y 2019), es decir, en ellos la métrica es inducida por una norma⁸ (Weisstein, 2023a) y son precisamente los espacios L_p en los que se estudia teoría de la medida (que es equivalente a la teoría de las probabilidades por los axiomas de Kolmogórov), especialmente en los L_2 , así como también son precisamente los espacios de probabilidad espacios en que el intervalo unitario $(0,1)$ tiene una medida de Lebesgue [que es independiente de la noción de

⁷ Que para el caso más simple de espacios euclidianos es el teorema de Pitágoras, para casos más habituales se generaliza dicho teorema.

⁸ Los espacios L_p son generalizaciones de los espacios L_2 , pero cuando p es diferente de 2 todo espacio L_p es un espacio de Banach que no es un espacio de Hilbert, por eso se mencionan por separado los espacios de Banach y los de Hilbert.

espacio (Weisstein, 2023b)], pero el intervalo unitario es un espacio de números reales y la construcción de los reales como espacio conduce a que los reales sean un espacio de Hilbert (Wikipedia, 2023).

Esto prueba que las normas L_2 y L_p en general, que exigen independencia entre las observaciones, son omnipresentes en el análisis estadístico.

Por los motivos antes expuestos, el análisis inferencial señalado se sustituyó con un análisis descriptivo del comportamiento de las diferencias de las medias y medianas de las tasas de plusvalía sectorial respecto a la media y mediana global, cuyos resultados se presentan en la sección 3.3.3.

Al considerar evidencia puramente teórica (las diferentes variedades de la ley de los grandes números tanto en su versión débil como fuerte), evidencia estadística (los resultados de las pruebas aplicadas sobre las tasas de plusvalía sectorial) y evidencia híbrida (los hechos empíricos relativos a los orígenes del mercado de trabajo teorizados por Smith y Marx) se logra:

1. Contribuir a la comprensión orgánica de la interrelación entre las leyes que rigen los sistemas de economía política capitalista y las leyes que rigen el comportamiento numérico de los fenómenos de la realidad de carácter casual acontecidos en masa.
2. Contribuir multidimensionalmente a la verificación o falsación de la afirmación teórica de que en el estudio del comportamiento asintótico de la tasa media de ganancia pueden asumirse como uniformes las tasas de plusvalía sectorial, lo que tiene implicaciones en la investigación aplicada sobre dicho mismo fenómeno por cuanto en su estudio estadístico no será necesario considerar explícitamente tales diferencias. Esto contribuye a verificar o

falsar las conclusiones de las investigaciones sobre el comportamiento a largo plazo y/o internacional de la tasa media de ganancia que no consideran explícitamente las diferencias entre las tasas de plusvalía sectorial.

3. RESULTADOS

3.1. La ley de los grandes números

Como se señaló, la LGN establece fundamentalmente que los datos (concebidos sea como observaciones o como variables aleatorias) en muestras grandes tienden a estabilizarse alrededor de su valor esperado (lo que cambia entre LFGN y LDGN es la forma en que esto ocurre), lo que significa para esta investigación que las tasas medias de plusvalía de cada sector económico convergen asintóticamente hacia el promedio ponderado teórico global, donde las ponderaciones son las probabilidades de ocurrencia de cada tasa media sectorial.

Algunas investigaciones de carácter teórico que postulan variaciones más flexibles de la LFGN son:

1. Li, Rao y Wang (1995, p. 181) para el caso de un campo definido como retículo, donde las variables aleatorias convergen según lo establecido en el postulado clásico, bajo determinadas condiciones⁹.

.....
⁹ Tales condiciones son: 1) que la dimensión del campo sea una potencia de los números naturales, y que la integral de las variables aleatorias elevadas a una potencia $0 < p < 2$ sea finita (si $1 \leq p < 2$, las variables deben estar centradas en la media); 2) que las ponderaciones conformen una estructura de datos matricial cuyos elementos sean doblemente indizados (que tengan dos índices) y en la que cada fila tenga tantos elementos como el índice de la fila (estas son las características de un *triangular array*), es decir, la fila 1 tiene un elemento, la fila 2 tiene dos, la fila 3 tiene 3 y así sucesivamente; 3) que el *triangular*

2. Adler y Rosalsky (1987, p. 467) prueban que la ley se cumple para el caso de una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas pertenecientes a una suma ponderada normada (para las cuales se define una norma, es decir, se definen longitudes de las variables en cuestión en términos del espacio vectorial dentro del cual existen).
3. Chen y Sung (2016, p. 87) prueban (generalizando los resultados de Adler y Rosalsky de 1987) el cumplimiento de la ley para el caso de una sucesión de variables aleatorias X_i (con $i = 1, 2, \dots, n$) estocásticamente dominada por una variable aleatoria (que existe un orden parcial definido por una variable aleatoria), donde las ponderaciones para las variables aleatorias se definen como a_i/b_n con $n \geq 1$.¹⁰
4. Sung (2011, p. 4277), proporciona condiciones suficientes en que las variables aleatorias X_n (con $n \geq 1$) pueden ser dependientes entre sí siempre que sus momentos de probabilidad satisfagan ciertas condiciones (que tienen que ver, a grandes rasgos, con la finitud de su primer y segundo momentos).

Así, para el caso de Li, Rao y Wang (1995, p. 181), los datos económicos efectivamen-

te son un campo y también un retículo, es posible ajustar la dimensión del campo (mediante la agregación o desagregación de sectores) para que sea una potencia de los naturales¹¹ y la misma clase de ajustes puede realizarse para los otros requisitos similares,¹² haciendo un ajuste de distribución de las tasas de plusvalía de cada sector para el periodo estudiado y con ello verificar si existe la integral del cuadrado de cada una de las variables aleatorias así obtenidas, y por la naturaleza de los datos está asegurado que el supremo de las variables sea finito. Si la posibilidad de estos ajustes se materializa o no, dependerá del conjunto de datos en concreto. Las investigaciones de los ejemplos 2 y 3 se generalizan en el ejemplo 4 para variables dependientes, donde es razonable esperar que se cumplan las condiciones exigidas para tal generalización (relativas a la media y varianza finitas) debido a la naturaleza de los datos estudiados.

Como se verifica en Sung (2011, pp. 4277-4278), lo mismo ocurre con las demás condiciones, por ejemplo, es posible construir dos funciones positivas $g(x)$ y $h(x)$ que dependan de la sucesión de variables aleatorias $x \in X_n$, con $g(x)$ estrictamente creciente y convergente al infinito cuando x tiende al infinito.

.....
array antes definido sea de una dimensión equivalente al producto cartesiano de dos espacios de las mismas dimensiones, en el que ambos sean potencias de los naturales y la misma potencia del retículo ya definido donde se encuentran las variables; 4) que el primer índice de las ponderaciones contenidas en el *triangular array* sea igual al número de variables aleatorias contenidas en el retículo y que su segundo índice sea menor o igual al número de las variables aleatorias referidas, y 5) que el supremo de las variables aleatorias sea finita.

¹⁰ Donde tanto a_i como b_n son sucesiones de números reales, b_n es la sucesión de constantes de norma (que definen los valores de las longitudes de los elementos de la sucesión) y con la característica de que al multiplicarla por sí infinitas veces arroja un valor superior a cero.

.....
¹¹ Esto variará según la clasificación sectorial que se esté analizando, pero tales sectores pueden agruparse o desglosarse de tal manera que se cumpla este requisito.

¹² Que las ponderaciones conformen un *triangular array*, que este sea igual al producto cartesiano de dos espacios con las mismas dimensiones y ambos de la misma potencia que el retículo donde se encuentran las variables aleatorias y que el primer índice sea igual al número de variables aleatorias (los sectores económicos) y el número de columnas sea menor o igual al número de filas. Para complementar con datos las casillas que pudiesen faltar al hacer estos ajustes (posibilidad determinada por el periodo de análisis) es factible hacer pronósticos con modelos estadísticos sobre tales valores, puesto que rellenar con ceros dichas casillas tendría un impacto en el promedio y lo alejaría de expresar la verdad de la dinámica capitalista en el periodo de interés.

Tales funciones sólo deben existir, es decir, deben poderse construir matemáticamente, no implica que necesariamente tengan un significado económico concreto.

Si bien en los escenarios del 1 al 3 se requiere la independencia de las variables y la identidad de las distribuciones, es conocido que este requisito empíricamente es en realidad que la dependencia sea baja (medido esto, por ejemplo, con un factor de inflación de varianza inferior a 10).

Con relación a la identidad de las distribuciones de las variables aleatorias hay que señalar dos cosas. Por un lado, asintóticamente y bajo determinadas condiciones, todas las distribuciones convergen a la normal¹³ y, por otro lado, la investigación 3 generaliza los resultados de la investigación 2 precisamente en el sentido de que no se establecen requisitos sobre la distribución conjunta, es decir, que no necesariamente las variables aleatorias analizadas deben ser idénticamente distribuidas.

Algunas investigaciones de carácter teórico que postulan variaciones más flexibles de la LDGN son:

1. Como establece Davidson (2021, pp. 313-344), una martingala es una sucesión de variables aleatorias en la que la expectativa condicional de la próxima variable, dada la información previa, es igual a la última observación en la secuencia. Una mixingala es una sucesión de diferencias de martingala, es decir, una

¹³ Esto ocurre por el teorema del límite central (TLC), que también posee versiones más flexibles que su postulación clásica. A pesar de que las versiones más flexibles del TLC son más abundantes y fáciles de vincular con la realidad que las de la LGN, nuestro análisis está centrado en la última, por lo que no se abordará más la primera, puesto que tal abordaje constituye una investigación en sí misma.

sucesión de variables aleatorias en la que cada término es la diferencia entre los valores consecutivos de una martingala. De Jong (1998, p. 210) señala que “durante mucho tiempo se ha reconocido que para las variables aleatorias que son series de tiempo, es problemático hacer la suposición de independencia. Por lo tanto, para justificar la inferencia asintótica de series temporales, son importantes las leyes de los grandes números (LGN) y los teoremas del límite central para las variables aleatorias dependientes (...). Por lo tanto, las LGN débiles para las mixingalas son importantes para obtener resultados de convergencia débil y normalidad asintótica para los estimadores en el caso de variables aleatorias dependientes.”

2. La investigación de Andrews (1988, p. 458) proporciona L^1 (la norma L^1) [*i.e.*, funciones elevadas a la potencia unitaria cuya integral existe; Kolmogórov y Fomin, 1978, p. 417] y leyes débiles de los grandes números para mixingalas L^1 uniformemente integrables¹⁴ (véase Davidson, 2021, p. 250). La condición de mixingalas L^1 es una condición asintótica de dependencia temporal débil que es más débil que la mayoría de las condiciones consideradas en la literatura. Los procesos cubiertos por las leyes de los grandes números incluyen diferencia de martingala,

¹⁴ Se dice que una colección $\{X_\tau, \tau \in \mathbb{T}\}$ es uniformemente integrable si se verifica que $\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_{\tau \in \mathbb{T}} E(|X_\tau| 1_{|X_\tau| > M}) = 0$. Lo anterior significa que el valor límite de la menor de las cotas superiores del valor esperado de la colección estudiada, a medida que se van tomando en consideración todos los elementos de dicha colección, es cero. Por la definición de “supremo”, esto significa que, para muestras lo suficientemente grandes, el valor esperado de la colección estará tan arbitrariamente cerca de cero como se quiera, específicamente a $0 - \epsilon$, donde $\epsilon > 0$ es una constante tan arbitrariamente pequeña como se quiera.

supuestos de mezcla de $\phi(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ y $\alpha(\cdot)$ ¹⁵ (véase Davidson, 2021, pp. 287-288), media móvil autorregresiva, media móvil de orden infinito, dependencia de la época cercana¹⁶ (véanse Fischer, 2017, p. 1; Davidson, 2021, p. 368), dependencia de la época L^1 -cercana, sucesiones de mixingalas y *triangulares arrays*. No es necesario que las variables aleatorias posean más de un momento finito y los números de mixingalas L^1 no necesitan decaer hasta cero a ninguna tasa particular.

3.2. La dinámica observable de las tasas de plusvalía sectorial en el mercado de trabajo

Como se adelantó, Marx (2010, p. 150) señala que es Smith quien demuestra la tendencia a la UTP o, lo que es lo mismo, su convergencia asintótica hacia el valor esperado global.¹⁷

Esto ocurre en Smith (1996, pp. 152-177), que corresponde a la Introducción y Parte I (titulada “Desigualdades que derivan de la naturaleza misma de los empleos”) del capítulo 10 de *La riqueza de las naciones*.

Fundamentalmente, lo que señala Smith ahí es que las ventajas y desventajas totales de los diversos empleos del trabajo en una misma zona deben o bien ser perfectamente iguales o atender constantemente hacia la igualdad como resultado de que si en un mismo lugar hubiese un empleo evidentemente mucho más o menos ventajoso que el resto, habría tanta gente que invertiría en el primero, o que lo abandonarían en el segundo, que sus ventajas pronto retornarían al nivel de los demás empleos.

Esto lo justifica considerando que en la determinación de los salarios promedio de cada sector influyen de manera no uniforme los siguientes factores económicos y/o culturales:

1. La sencillez o dificultad del trabajo. Esto está vinculado a la complejidad de la fuerza de trabajo y, por consiguiente, al trabajo social simple promedio ponderado necesario para producir una determinada fuerza de trabajo, es decir, a su valor de cambio. Si el trabajo es más complejo será mejor remunerado debido a que tiene un costo de producción más alto.
2. Si el trabajo es agradable o desagradable, lo cual está vinculado a la limpieza o suciedad, a lo honroso o deshonroso y al prestigio o desprestigio social involucrado.
3. Peligro asociado e impacto en la salud del trabajador.

¹⁵ Donde $\phi(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ y $\alpha(\cdot)$ son los coeficientes de mezcla uniforme $\phi(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \sup_{G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}: P(G) > 0} |P(H|G) - P(H)|$, de mezcla fuerte $\alpha(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \sup_{G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}} |P(G \cap H) - P(G)P(H)|$ y de mezcla proyectada $\rho(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \sup_{G \in \mathcal{G}, H \in \mathcal{H}} |E(\xi\eta)| / \|\xi\|_2 \|\eta\|_2$, respectivamente. En las expresiones anteriores, \mathcal{G} y \mathcal{H} son sub σ -álgebras que pertenecen al σ -álgebra \mathcal{F} (el conjunto potencia 2^n construido con el espacio muestral de n -ésimos elementos), ξ es una variable aleatoria \mathcal{G} -medible y η es una variable aleatoria \mathcal{H} -medible, es decir, variables a las cuales se les puede asignar una probabilidad correspondiente a los eventos localizados en los sub σ -álgebra \mathcal{G} y \mathcal{H} , respectivamente.

¹⁶ El uso de procesos dependientes a la época cercana permite considerar funcionales de procesos dependientes de corto alcance. Estos funcionales pertenecen a espacios L_p , es decir, a espacios de funciones donde cada coordenada es una función elevada a una potencia p cuya integral existe. Tal dependencia a la época cercana es conocida como *dependencia a la época cercana en norma L_p* , esto es, la cercanía de la dependencia entre los elementos del funcional tiene una longitud medible en términos de una función de potencia p cuya integral existe.

¹⁷ Que puede interpretarse como un promedio ponderado de promedios, donde el ponderador es la probabilidad de ocurrencia de cada sumando. Que pueda verse como un promedio ponderado de promedios obedece a que es

un promedio ponderado de los resultados de cada una de las diferentes variables aleatorias y estos resultados pueden perfectamente ser promedios.

4. La temporalidad o no del trabajo, sea esta debida a la estacionalidad o a otra causa. Si el trabajo es temporal, la remuneración deberá ser un estímulo para compensar al trabajador (material y/o espiritualmente) por el tiempo que está desempleado.
5. La confianza que se requiere depositar en el trabajador. La remuneración de cada trabajo debe ser suficiente incentivo para que el trabajador responda a la confianza depositada. Por ejemplo, comparando el trabajo de un joyero y el de un carpintero, ante la superioridad del valor de cambio de los diamantes respecto al de la madera es necesario un mayor incentivo que prevenga la defraudación de la confianza que se tiene en que el trabajador no robará o hurtará la mercancía que se le ha confiado.
6. La expectativa de éxito laboral. En una profesión u oficio en la que unos pocos entre muchos llegan a conseguir empleo, esos pocos deben ganar por esos muchos, de lo contrario no habrá estímulo suficiente para que los trabajadores corran el riesgo de abocarse a esa profesión u oficio.
7. Aspectos complementarios relativos a la subjetividad individual del trabajador. La pasión por una profesión u oficio, el deseo de alcanzar reputación por ser exitoso en una rama laboral en que es difícil alcanzar el éxito, la confianza en sus propias capacidades y la confianza en su propia suerte.

Lo anterior, según Smith y Marx, da como resultado que el excedente producido en cada trabajo tiende a ser el mismo con relación a la remuneración efectiva de cada uno de estos trabajos. Nótese que esto es congruente no con la lógica detrás de la LGN clásica sino con esta en sus variedades no clásicas. Esto se afirma porque la LGN en su variedad clásica implica la independencia lineal recíproca de

las variables aleatorias estudiadas, mientras que en variedades más generales implica la dependencia lineal entre dichas variables y esta dependencia no sólo puede ser explicada en términos inmediatos (que una variable X_i depende propiamente de otra X_k , donde $i = 1, 2, \dots, n$ y $k = 1, 2, \dots, n$ con $i \neq k$, sin variables intermediarias), sino también en términos mediatos, es decir, con variables intermediarias, que en nuestra investigación significa que las tasas de plusvalía sectorial son no sólo directamente dependientes entre sí debido a la interrelación sectorial inherente a la organicidad de la dinámica capitalista (expresado esto en que el trabajo necesario para producir la fuerza de trabajo es social, esto es, involucra directa y/o indirectamente a la totalidad de sectores), sino también indirectamente a causa de variables comunes (las señaladas por Smith del punto 2 al 7) involucradas en la determinación de las remuneraciones de los diferentes trabajos. A diferencia de la variedad clásica en que no es posible considerar que la compensación recíproca de eventos (mediata e inmediatamente) está involucrada en la convergencia al valor esperado.

3.3. Análisis estadístico de las tasas de plusvalía sectorial

3.3.1. Ajustes de distribución de probabilidad

Luego de realizar un ajuste de distribución de probabilidad a los 36 sectores económicos que según los criterios establecidos son los sectores productivos de la economía estadounidense para el periodo 1960-2020, se obtuvieron los resultados del cuadro 1.

Como se verifica en el cuadro 2, no existe uniformidad en términos de la distribución de probabilidad que siguen las tasas de plus-

CUADRO 1
RESUMEN DEL AJUSTE DE DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD
DE LAS TASAS DE PLUSVALÍA SECTORIAL

| Distribución | Número de sectores | Proporción |
|--------------|--------------------|-------------|
| Log-Normal | 2 | 0.055555556 |
| Cauchy | 13 | 0.361111111 |
| Uniforme | 16 | 0.444444444 |
| Weibull | 2 | 0.055555556 |
| Logística | 3 | 0.083333333 |
| Total | 36 | 1 |

valía sectorial de la economía estadounidense para 1960-2020 y ninguno de los sectores se distribuye normalmente, como se comprueba al estudiar la bondad de ajuste de cada uno de los sectores con relación a las distribuciones

de probabilidad evaluadas bajo el criterio bayesiano de información (BIC, *Bayesian Information Criterion*). El requerimiento de que las variables aleatorias sean idénticamente distribuidas no se cumple.

3.3.2. Pruebas de independencia lineal

CUADRO 2
CORRELACIONES DE PEARSON SECTORIALES

| | Coefficientes de Pearson sectoriales |
|--|--------------------------------------|
| Número de coeficientes calculados | $36C2 = 630$ |
| Media | 0.08122961 |
| Mediana | 0.1396839 |

CUADRO 3
AJUSTES DE DISTRIBUCIÓN DE LAS CORRELACIONES SECTORIALES

| Distribución de probabilidad | Valor BIC |
|------------------------------|------------|
| Normal | 1 143.0426 |
| Cauchy | 1 468.7365 |
| Logística | 1 193.0824 |
| Uniforme | 866.9677 |
| t de Student | 1 390.9972 |

El cuadro 4 tiene como finalidad determinar si debe usarse el promedio para describir el conjunto de correlaciones sectoriales o la mediana. Se observa que no es la distribución normal la que mejor describe la distribución del conjunto de datos en cuestión, sino la distribución uniforme. A pesar de ello, la distribución normal es la segunda distribución, entre las distribuciones probadas, que mejor ajuste presenta. Por lo tanto, estimar la mediana del conjunto de datos es un complemento adecuado a la estimación de la media antes realizada. Puesto que ni la media ni la mediana del conjunto de correlaciones es nula, se concluye que no existe independencia lineal entre los sectores que componen la economía estadounidense durante el periodo 1960-2020.

Adicionalmente, es necesario señalar que de entre las 630 correlaciones sectoriales calculadas, 123 fueron mayores o iguales a 0.7, 141 mayores o iguales a 0.6, 178 mayores o iguales a 0.5, 207 mayores o iguales a 0.4 y 256 mayores o iguales a 0.3. Esto significa que, aunque la media (0.08122961) y la mediana (0.1396839) de las 630 correlaciones no puedan parecer valores importantemente altos (especialmente la media), si consideramos como relevante que el 30% de tasa de plusvalía de un sector se explique linealmente por la tasa de plusvalía de otro sector, aproximadamente el 40.63% de las relaciones sectoriales presentan una dependencia lineal importante.

3.3.3. Análisis descriptivo de las diferencias entre las medias/medianas de las tasas de plusvalía sectorial y la media/mediana global

Como se mostró en la sección anterior, las pruebas inferenciales disponibles sobre la significancia estadística de las diferencias entre las medias/medianas sectoriales y la

media/mediana global exigen requisitos que no sólo el conjunto de datos estudiado no cumple, sino que tampoco puede esperarse que lo cumpla ningún conjunto de datos de la misma naturaleza, es necesario realizar un análisis descriptivo del conjunto de datos para poder indagar un poco más sobre las diferencias antes señaladas.

CUADRO 4
ANÁLISIS DE DIFERENCIAS ENTRE LAS TASAS DE PLUSVALÍA SECTORIAL Y LA TASA DE PLUSVALÍA MEDIA/MEDIANA GLOBAL

| | Media global | Mediana global |
|-------------------------------|--------------|----------------|
| Suma de diferencias | 3.37508E-14 | 0.04403386 |
| Media de diferencias | 9.37522E-16 | 0.001223163 |
| Mediana de diferencias | 0.158948788 | 0.0021193 |

CUADRO 5
AJUSTE DE DISTRIBUCIÓN DE DIFERENCIAS ENTRE LAS TASAS DE PLUSVALÍA SECTORIAL Y LA TASA DE PLUSVALÍA MEDIA GLOBAL

| Distribución de probabilidad | Valor BIC |
|------------------------------|-----------|
| Normal | 56.6229 |
| Cauchy | 5.599296 |
| Logística | 42.08044 |
| Uniforme | 65.719701 |
| t de Student | 78.227133 |

CUADRO 6
AJUSTE DE DISTRIBUCIÓN DE DIFERENCIAS ENTRE LAS TASAS DE PLUSVALÍA SECTORIAL Y LA TASA DE PLUSVALÍA MEDIANA GLOBAL

| Distribución de probabilidad | Valor BIC |
|------------------------------|------------|
| Normal | -165.39538 |
| Cauchy | -143.15477 |
| Logística | -161.55954 |
| Uniforme | -199.93063 |
| t de Student | 69.92264 |

La construcción del cuadro 5 parte de dos escenarios. En el primero, se calculan las diferencias de las tasas de plusvalía sectorial respecto a la tasa de plusvalía media global, mientras que en el segundo se calculan en relación con la mediana global. Una vez obtenidas estas diferencias, se suman, se calcula su media y su mediana. En general, salvo el caso de la mediana de las diferencias calculadas respecto a la media global, tales diferencias tienden a la nulidad, es decir, existe una nulificación recíproca. Los cuadros 6 y 7 tienen como finalidad determinar el parámetro de localización ideal para describir el conjunto de datos (al igual que el cuadro 4 con relación al cuadro 3).

Estudiando los resultados más en detalle, con la finalidad de determinar si la media, la mediana o ambas son el estadístico relevante en el análisis, se observa que las diferencias calculadas en relación con la media siguen una distribución de Cauchy (donde la mediana es el parámetro de localización) o una distribución logística (que tiene a la media como parámetro de localización) como segunda mejor opción, mientras que las calculadas respecto a la mediana siguen una distribución uniforme (que tiene al menor valor de la distribución como parámetro de localización, para el caso -0.03023565) o una distribución normal como segunda opción (que tiene a la media como parámetro de localización). En general, los resultados del análisis descriptivo¹⁸ arrojan evidencia a favor de que las diferencias tienden a la nulificación recíproca.

Por las propiedades asintóticas de los estimadores, especialmente por el TLC, sería esperable que, en el escenario de poder des-

glosar sectorialmente lo suficiente la producción nacional de manera estandarizada (en esta investigación, la estandarización forzó a reducir de manera importante el número de sectores) para un periodo lo suficientemente grande, las distribuciones de las diferencias estimadas convergieran a la distribución normal.

El TLC existe en versiones más flexibles que su postulación clásica, en las cuales admite correlación entre las variables aleatorias, así como diferencias distributivas y otros elementos diferenciadores (Godwin y Zarembo, 1961, p. 677; Ko *et al.*, 2007, p. 259). En tal caso, la media sería el único parámetro de localización necesario para describir las distribuciones.


4. CONCLUSIONES

Los resultados presentados en la sección precedente muestran que la lógica del planteamiento de Smith relativo a la ley de tendencia hacia la UTP es consistente con la lógica detrás de determinadas variedades de la LGN (tanto en su versión fuerte como débil) que admite que las variables aleatorias estén correlacionadas (sean linealmente dependientes) y que no exigen que estas sean idénticamente distribuidas. En términos de la consistencia formal de la ley de la tendencia a la UTP con las variedades de la LGN señaladas, esta se verifica siempre que sea posible realizar transformaciones sobre el conjunto de datos tales que permitan que este cumpla con los requisitos de forma que se exigen, por ejemplo, poder expresarlos en términos de *triangulares arrays* mediante acciones como agrupamiento de sectores, separación de sectores, estimación de periodos faltantes mediante modelos inferenciales u otras acciones de similar índole según sea necesario y las características del conjunto

¹⁸ O quizás sería más preciso llamarlo semidescriptivo, por el uso de ajustes de distribución de probabilidad.

de datos (por ejemplo, el nivel de desglose) lo permitan.

Complementariamente, los resultados del análisis estadístico descriptivo e inferencial identificaron diferentes cuestiones. Las tasas de plusvalía sectorial no son, en términos generales, linealmente independientes y su dependencia es estadísticamente relevante, y, por otro lado, no existe uniformidad ni tendencia hacia ella en la distribución de probabilidad que siguen estas tasas en el periodo de análisis. Por los dos motivos antes señalados, así como porque el método de Bootstrap elimina la correlación entre grupos más no la de los subgrupos

que conforman los grupos de interés, las pruebas de significancia de diferencia entre medias y medianas no son adecuadas para hacer inferencias sobre el conjunto de datos. Ello condujo a estudiar descriptivamente las diferencias en las tasas de plusvalía sectorial en términos de la media y la mediana globales, realizando ajustes de distribución de probabilidad por máxima log-verosimilitud sobre tales diferencias, obteniendo resultados que apuntan en una dirección favorable a los planteamientos de Smith y Marx relativos a la tendencia hacia la uniformidad sectorial de las tasas de plusvalía. 

REFERENCIAS

- Adler, A. y Rosalsky, A. (1987). On the strong law of large numbers for normed weighted sums of I.I.D. random variables. *Stochastic Analysis and Applications*, 22(4), pp. 467-483. <https://doi.org/10.1080/073629987088809131>
- Andrews, D.W. (1988). Laws of large numbers for dependent non-identically distributed random variables. *Econometric Theory*, IV(3), pp. 458-467. <https://doi.org/10.1017/S0266466600013396>
- Borisov, E.F., Zhamin, V.A. y Makarova, M.F. (2009). Diccionario de economía política. Ciudad de Guatemala: Tratados y Manuales Grijalbo. [en línea] Disponible en: <<http://mijangos.byethost5.com/biblioteca/001diccionario.pdf?i=1>>.
- Carchedi, G. y de Haan, W. (1995). The transformation procedure: A non-equilibrium approach. En: A. Freeman y G. Carchedi (eds.), *Marx and Non-Equilibrium Economics* (pp. 1-29). Brookfield: Edward Elgar Publishing. [en línea] Disponible en: <https://www.academia.edu/304345/Marx_and_Non_Equilibrium_Economics>.
- Chen, P. y Sung, S.H. (2016). On the strong laws of large numbers for weighted sums of random variables. *Statistics and Probability Letters*, 118, pp. 87-93. <https://doi.org/10.1016/j.spl.2016.06.020>
- Cogliano, J.F. (2021). Marx's equalized rate of exploitation [Research Papers in Economics]. University of Massachusetts, Boston. [en línea] Disponible en: <http://repec.umb.edu/RePEc/files/2021_01.pdf> [Consultado el 26/12/2022].
- Cross Validated (2014). What does “independent observations” mean? [en línea] Disponible a través: *Stack Exchange*, <<https://stats.stackexchange.com/questions/116355/what-does-independent-observations-mean>>.
- Davidson, J. (2021). *Stochastic Limit Theory: An Introduction for Econometricians*. 2ª edición. Oxford: Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oso/9780192844507.001.0001>

- De Jong, R.M. (1998). Weak laws of large numbers for dependent random variables. *Annales d'Économie et de Statistique*, 51, pp. 209-225. [en línea] Disponible en: <<https://www.jstor.org/stable/20076144>>.
- Dussel, E. (1985). La producción teórica de Marx: un comentario a los Grundrisse. 2ª edición. México: Siglo XXI. [en línea] Disponible en: <<https://espai-marx.net/elsarbres/review/la-produccion-teorica-de-marx-un-comentario-a-los-grundrisse-enrique-dussel/>>.
- Fischer, S. (2017). Generalized linear statistics for near epoch dependent processes with application to EGARCH-processes. [en línea] Disponible a través de: *arXiv*, <<https://arxiv.org/pdf/1705.04545.pdf>> [Consultado el 25/12/2022].
- Gao, C. y Watanabe, M. (2023). Understanding the “service economy” — A Marxist critical approach. *World Review of Political Economy*, 14(1), pp. 34-62. <https://doi.org/10.13169/worlrevipoliecon>
- Godwin, H.J. y Zaremba, S.K. (1961). A central limit theorem for partly dependent variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, 32(3), pp. 677-686. [en línea] Disponible en: <<https://www.jstor.org/stable/2237829>>.
- Gómez Julián, J.M. (2023, 09 21). Marxist average rate of profit for United States (1960-2020) with documentation. OSF, 14 de noviembre. <https://doi.org/10.17605/osf.io/7j8kf>
- Grinstead, C. y Snell, L. (2023). *Introductory Probability*. Davis, CA: Open Education Resource LibreTexts Project. [en línea] Disponible en: <<https://batch.libretexts.org/print/Letter/Finished/stats-3120/Full.pdf>>.
- Ko, M.-H., Ryu, D.-H., Kim, T.-S. y Choi, Y.-G. (2007). A central limit theorem for general weighted sums of LNQD random variables and its application. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 43(3), pp. 259-268. <https://doi.org/10.4134/JKMS.2006.43.3.529>
- Kolmogórov, A. y Fomin, S.V. (1978). *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. 2ª edición. Moscú: MIR.
- Lehmann, E.L. (1959). *Testing Statistical Hypotheses*. Berkeley: John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1007/0-387-27605-X>
- Li, D., Rao, M.B. y Wang, X.C. (1995). On the strong law of large numbers and the law of the logarithm for weighted sums of independent random variables with multidimensional indices. *Journal of Multivariate Analysis*, 52(2), pp. 181-198. <https://doi.org/10.1006/jmva.1995.1010>
- Marx, K. (1969). *Theories of Surplus-Value*. Moscú: Progress Publishers.
- Marx, K. (1975). Comments on James Mill, *Eléments d'économie politique*. En: K. Marx y F. Engels, *Collected Works* (Vol. III, pp. 211-228). Londres: Lawrence & Wishart. [en línea] Disponible en: <https://archive.org/details/MarxEngelsCollectedWorksVolume10MKarlMarx/Marx%20%26%20Engels%20Collected%20Works%20Volume%203_%20Ka%20-%20Karl%20Marx/>.
- Marx, K. (2010). *El Capital*. Vol. III. 2ª edición. México: Fondo de Cultura Económica.
- Mathematics (2015). Is a Banach space also a metric space? [en línea] Disponible a

- través de: *Stack Exchange*, <<https://math.stackexchange.com/questions/1326890/is-a-banach-space-also-a-metric-space>>.
- Mathematics (2019). Metrics vs. Norms (Fréchet spaces, Banach spaces, etc.). [en línea] Disponible a través de: *Stack Exchange*, <<https://math.stackexchange.com/questions/3335496/metrics-vs-norms-fr%C3%A9chet-spaces-banach-spaces-etc>>.
- McCullagh, P. y Nelder, J.A. (1989). *Generalized Linear Models*. 2ª edición. Londres: Chapman & Hall. [en línea] Disponible en: <<https://www.taylorfrancis.com/books/mono/10.1201/9780203753736/generalized-linear-models-mccullagh>>.
- Office of Management of Budget (2022). North American Industry Classification System. Washington, DC: United States Census Bureau. [en línea] Disponible en: <<https://www.census.gov/naics/>>.
- Perron, P. y Ng, S. (1996). Useful modifications to some unit root tests with dependent errors and their local asymptotic properties. *The Review of Economic Studies*, LXIII(3), pp. 435-463. <https://doi.org/10.2307/2297890>
- Schwert, G.W. (1989). Tests for unit roots: A Monte Carlo investigation. *Journal of Business & Economic Statistics*, VII(2), pp. 147-159. <https://doi.org/10.1080/07350015.1989.10509723>
- Smith, A. (1996). *La riqueza de las naciones*. Libros I-II-III y selección de los Libros IV y V. (C.R. Braun, ed. y trans.). Madrid: Alianza Editorial. [en línea] Disponible en: <[http://www.iunma.edu.ar/doc/MB/lic_historia_mat_bibliografico/Fundamentos%20de%20Econom%C3%ADa%20Pol%C3%ADtica/194-Smith,%20Adam%20-%20La%20riqueza%20de%20las%20naciones%20\(Alianza\).pdf](http://www.iunma.edu.ar/doc/MB/lic_historia_mat_bibliografico/Fundamentos%20de%20Econom%C3%ADa%20Pol%C3%ADtica/194-Smith,%20Adam%20-%20La%20riqueza%20de%20las%20naciones%20(Alianza).pdf)>.
- Statistics Solutions (2023a). Assumptions of logistic regression. [en línea] Disponible a través de: *Directory of Statistical Analyses*, <<https://www.statisticssolutions.com/free-resources/directory-of-statistical-analyses/assumptions-of-logistic-regression/>>.
- Statistics Solutions (2023b). Assumptions of the factorial ANOVA. [en línea] Disponible a través de: *Directory of Statistical Analyses*, <<https://www.statisticssolutions.com/free-resources/directory-of-statistical-analyses/assumptions-of-the-factorial-anova/>>.
- Sung, S.H. (2011). On the strong law of large numbers for weighted sums of random variables. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(11), pp. 4277-4287. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.10.018>
- Tregenna, F. (2009). 'Services' in *Marxian economic thought* [Cambridge Working Papers in Economics no. 0935]. Faculty of Economics, University of Cambridge, Reino Unido. [en línea] Disponible en: <<https://www.econ.cam.ac.uk/research-files/repec/cam/pdf/cwpe0935.pdf>>.
- Watanabe, M. (1991). Marx's category of service labor. *Hitotsubashi Journal of Social Studies*, 23(1), pp. 25-36. [en línea] Disponible en: <<https://www.jstor.org/stable/43294316>>.
- Weisstein, E. (2023a). L^p -Space. [en línea] Disponible a través de: *Wolfram MathWorld*, <<https://mathworld.wolfram.com/Lp-Space.html>>.
- Weisstein, E. (2023b). Lebesgue measure. [en línea] Disponible a través de: *Wolfram MathWorld*, <<https://mathworld.wolfram.com/LebesgueMeasure.html>>.

Wikipedia (2023). Real number. Real algebraic geometry. [en línea] Disponible a través de: *Wikipedia*, <https://en.wikipedia.org/wiki/Real_number>.

Zimmerman, D.W. (1975). Probability spaces, hilbert spaces, and the axioms of test theory. *Psychometrika*, 40, pp. 395-412. <https://doi.org/10.1007/BF02291765>