Ahorro:
un enfoque de *control óptimo*

Juan Marcos Ortíz Olvera

Resumen

El presente trabajo muestra un ejercicio teórico-matemático para determinar niveles óptimos de ahorro, donde éste depende de los retornos de los activos. Para ello, se emplea la teoría del control óptimo, debido a que la naturaleza del ahorro es temporal, parece más adecuado darle un tratamiento dinámico que uno estático. La idea que se expone es simple, se requiere encontrar la trayectoria óptima de los retornos para que dicha trayectoria genere una trayectoria óptima de ahorro.

Palabras Clave:
- Técnicas de Optimización
- Ahorro
- Mercados Financieros

Abstract

The essay shows an exercise, both theoretical and mathematical, to determine optimal levels of savings, assuming that it depends on the assets' returns. For this task, the optimal control theory is employed, due to that the nature of the savings implies time, seems more adequate to give provide a dynamic treatment rather than a static one. The idea that is exposed is simple, is required to find the optimal path on the returns in order to yield an optimal path for savings.

Key words:
- Optimization Techniques
- Savings
- Financial Markets

JEL Classifications: C61, E21, E44, O16

Presentación

La estática comparada es una técnica que nos muestra las tasas de cambio instantáneo de una variable dado el cambio de otra, *ceteris paribus*. Esta es la razón por la cual es utilizada para analizar hipótesis estáticas. En ciertos problemas, sin embargo, el análisis de movimientos instantáneos de la variable de elección es inadecuado. En el caso del ahorro, donde la decisión sobre cambiar el nivel del flujo de los retornos de los activos es importante, este problema se vuelve más evidente. Estas decisiones son inherentemente dinámicas. La trayectoria varía con decisiones tomadas hoy; entendiendo que, las decisiones del presente afectan al futuro. En la *teoría del control óptimo,* el empleo del *principio del máximo*, es una técnica matemática fundamental para resolver problemas de optimización dinámica restringidos. En el presente trabajo se busca

- Explicar qué implica modelar el ahorro como un problema de optimización dinámica bajo restricciones
- Mostrar una técnica -el principio del máximo– mediante la cual este tipo de problemas pueden resolverse.

Empezaremos con una dosis de historia en la sección 2. En la sección 3 se construye el planteamiento de los elementos que habrán de construir al ahorro como problema de optimización dinámica. Al realizar esto, se establecerán los elementos claves de los problemas de control óptimo y su solución. La sección 4 presenta el desarrollo y cómo se logra la solución. En la sección 5 se presentan algunas reflexiones y conclusiones breves sobre el modelo.

2. Un poco de historia

En sus inicios la investigación en optimización dinámica aplicaba únicamente el cálculo de variaciones, técnica matemática desarrollada en los siglos XVIII y XIX. Mientras en el cálculo estándar, donde el valor de la función depende del valor de una variable independiente, en el cálculo de variaciones el valor de la función depende de otra función. Esto hace que el cálculo de variaciones es más complejo que el cálculo estándar, debido a que es más difícil encontrar la forma óptima de una función completa que el valor óptimo de una variable. Por ejemplo, en el modelo ahorro-consumo de Ramsey, la utilidad en el tiempo de vida del consumidor depende de la trayectoria de consumo. Bajo ésta idea, el objetivo principal de la optimización dinámica es encontrar la trayectoria temporal del consumo que maximiza la utilidad del consumo en su tiempo de vida. Ahora, si consideramos el modelo de Hotelling, dónde se parte de la existencia de recursos limitados, la optimización dinámica genera una trayectoria temporal de extracción de recursos que maximiza el valor de un proyecto de recursos. Normalmente, en economía y finanzas, se busca una trayectoria óptima que represente la variable de decisión como una función del tiempo. Esto no excluye que la técnica sea usada en otras disciplinas, tales como la física, ingeniería u otras ciencias exactas.

A mediados del siglo XX, Richard Bellman inició una serie de investigaciones cuyas características involucraban soluciones numéricas para problemas de optimización dinámica. Este fue el arranque del estudio sistemático de la factibilidad computacional de la programación dinámica. Su gran virtud fue la de recolectar un gran número de problemas de diversas disciplinas y buscar su solución, experimentando con nuevas técnicas y algoritmos.

Este esfuerzo intelectual condujo a la publicación, en 1957 del texto *Dynamic Programming* y en 1962 *Applied Dynamic Programming*.[1] En ese mismo lustro, L.S. Pontryagin, ayudado por grupo de trabajo, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, publicaron los resultados sobre su investigación en teoría de Control Óptimo, este texto seminal, que lleva el título, *The Mathematical Theory of Optimal Porcesses*, fue publicado en la entonces Unión Soviética en 1961.

En el cálculo de variaciones, el tomador de decisiones tiene control directo de la denominada variable de estado. Es decir, existe una relación directa entre la variable de decisión y la variable de estado en cada instante del tiempo. El control directo de la variable de estado, a través del tomador de decisiones, está totalmente definido para el cálculo de variaciones. La teoría del control óptimo considera una situación más general, en la cual el cambio en la variable de estado depende,

1 Este en coautoría con S. E. Dreyfus.

simultáneamente, de la variable de decisión y del nivel de la variable de estado. Esto vincula las decisiones en el tiempo, debido a que las decisiones presentes afectan el nivel de la variable de estado en el futuro. Siguiendo ésta idea, la variable de estado provee un canal por el cual la decisión presente impacta el crecimiento de la variable de estado. Bellman en sus investigaciones entendió esto y concluyó que es prácticamente imposible resolver problemas de control óptimo empleando cálculo de variaciones. Esto ocurrió al detectar en varias ocasiones, con situaciones de diversa índole, pequeñas modificaciones en el problema causaban grandes cambios en las soluciones. Esta característica generó la evidencia de una carencia de equilibrio, por lo que obtuvo como conclusión que el cálculo de variaciones no era siempre una herramienta efectiva para cierto tipo de problemas.

Por esta razón, Bellman desarrolló la programación dinámica, la cual resuelve problemas de control óptimo de modo numérico. Sin embargo, le tomó tiempo darse cuenta de que la programación dinámica es un método numérico para resolver problemas de control óptimo.

3. El problema

Consideremos un problema simple de ahorro, empleando la variable de estado s para ahorro y la variable de control R, para los retornos de los activos disponibles por un individuo típico. La variable R es un instrumento de política que nos permite influir a la variable de estado. Entendido esto, decimos que alguna trayectoria de control $R(t)$ implicará una trayectoria de estado asociada $s(t)$. Por lo que queda claro que debemos elegir la trayectoria de control óptima admisible $R^*(t)$ la cual, junto con la trayectoria de estado óptima admisible asociada $s^*(t)$, optimizará la funcional objetivo dado un intervalo de tiempo.

La teoría del control óptimo permite manejar una restricción sobre la variable de control R, tal que $R(t) \in \Re \; \forall t \in [O,T]$, donde $\Re$ denota algún conjunto de control acotado.[2]

Expuesto lo anterior, el problema de ahorro a estudiar queda:

$$\max \aleph = \int_0^T F(t,s,R)\,dt$$

$$\text{Sujeto a } s = f(t,s,R)\dot{s} = f(t,s,R)$$

$$s(0) = A; s(T) \text{ libre}, \quad (A, T \text{ dados})$$

$$R(t)\Re\in \; \forall t \in [O,T]$$

2 El conjunto de control puede ser cerrado y convexo, tal que $R(t)\in[O,T]$. El hecho de que $\Re$ sea un conjunto cerrado permite que sean admitidas las soluciones de esquina. Otro punto interesante es que el problema más sencillo de teoría de control óptimo, a diferencia del cálculo de variaciones, tiene un estado terminal libre más que un punto terminal fijo.

Aquí, la funcional objetivo ℵ (aleph), mantiene la forma de una integral definida. La presencia de la variable de control R requiere de una liga entre s y R, es decir que requerimos la relación entre ahorro y retornos. Tal información nos la provee la ecuación $\acute{s} = f(t,s,R)$ donde el símbolo punteado denota la derivada $\frac{ds}{dt}$. En otras palabras, para saber cómo afectan los retornos R el curso que toma el ahorro s.

Ahora, al tiempo inicial, los primeros dos argumentos en la función f deben tomar la forma del valor dado $t=0$ y $s(0)=A$, sólo quedándonos el tercer argumento para elegir. Entonces, para alguna política elegida en $t=0$, digamos R , (0) la ecuación generará un valor específico para $\dot{s}$, digamos $\dot{s}_1(0)$ y así para distintos puntos en el tiempo.

Si observamos a esta ecuación se aprecia que provee un mecanismo de movimiento donde mediante la elección del control R puede reflejarse en un patrón de movimiento específico de la variable de estado s. Basado en lo anterior, nos referiremos a ésta ecuación como la ecuación de movimiento para la variable de estado para abreviar ecuación de estado. Con esto quiero decir que la liga entre R y s puede describirse adecuadamente mediante la ecuación diferencial de primer orden $\acute{s} = f(t,s,R)$.

Se emplea una condición necesaria de primer orden, *el principio del máximo*. En el problema propuesto hay tres tipos de variables: t que corresponde al tiempo, s (ahorro, que funciona como la variable de estado) y R (los retornos corresponden a la variable de control). Para el proceso de solución tendremos una variable más, la llamada variable coestado o variable auxiliar y la denotaremos por λ.[3]

Definimos al Hamiltoniano como:

$$H(t,s,R,\lambda) \equiv F(t,s,R) + \lambda(t) f(t,s,R)^4$$

De modo formal escribimos el Hamiltoniano

$$H \equiv \lambda_0 F(t,s,R) + \lambda(t) f(t,s,R)$$

Donde λ_0 es una constante no negativa, por determinar.

---

3 La variable λ, es similar al multiplicador de Lagrange y, por su naturaleza es una variable de valuación. Es decir, permite medir el precio sombra de la variable de estado asociada. De igual modo que s y R, la variable l puede tomar diferentes valores en distintos puntos del tiempo, lo que implica que sea l(t). Para introducir la variable coestado al problema de control óptimo requerimos a la función Hamiltoniana.

4 Debido a que H consiste de la función integrando F adicionada al producto de la variable coestado y de la función λ, luego entonces es una función con cuatro argumentos, t, s, R, λ.

Se debe destacar que, a diferencia de la ecuación de Euler, la cual es una simple ecuación diferencial de segundo orden en la variable de estado, el principio del máximo involucra ecuaciones diferenciales de primer orden en la variable de estado y la variable coestado. Otro punto importante es que se requiere que el Hamiltoniano se maximice con respecto a la variable de control (los retornos) en cualquier punto del tiempo. Por lo que para el problema que presenté con el Hamiltoniano definido previamente, las condiciones del principio de máximo son:

$$\max_R H(t,s,R,\lambda) \quad \forall t \in [0,T]$$

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \text{(Ecuación de movimiento para } s\text{)}$$

$$\dot{\lambda} = \frac{-\partial H}{\partial s} \quad \text{(Ecuación de movimiento para } \lambda\text{)}$$

$$\lambda(T)=0 \quad \text{(Condición de transversalidad)}$$

Donde señala que el Hamiltoniano habrá de ser maximizado con respecto a los retornos R, como única variable de elección. Hay una forma equivalente para expresar esta condición

$$H(t,s,R^*,\lambda) \geq H(t,s,R,\lambda) \quad \forall t \in [0,T]$$

Donde R^* es el retorno de control óptimo y R es otro valor de control.[5] Si se observa la condición

$$\dot{s} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$$

Se aprecia que es una forma reestructurada de la ecuación de movimiento para la variable de estado del problema original. Re-expresando como derivada parcial de H con respecto de la variable coestado implica mostrar la simetría entre la ecuación de movimiento y la variable coestado.[6]

5 Se debe advertir que el requisito de Maximizar *H* con respecto *R* da pie para que surja el nombre de principio del máximo.

6 Las ecuaciones de movimientos en su conjunto es lo que conocemos como *Sistema Hamiltoniano* o *Sistema Canónico* para el problema.

4. Solución

Para desarrollar el problema se debe asumir que la variable de control R no está restringida, de tal modo que R^* es una solución interior. De igual manera, la función Hamiltoniana será diferenciable con respecto a R y la condición $\frac{\partial H}{\partial R}=0$ puede ser empleada en lugar de la condición max_R. Por último, el punto inicial está fijo, pero se permite que el punto terminal pueda variar. Esto sólo es para derivar condiciones de transversalidad que emplearemos en el proceso y resultado. El problema queda así:

$$\max \aleph = \int_0^T F(t,s,R)dt$$

$$\text{Sujeto a } s=f\,(t,s,R)$$

$$s(0)=s_0,\ (dado)$$

Ahora es necesario incorporar la ecuación de movimiento en la funcional objetivo y reformular la funcional en términos del Hamiltoniano. Entonces, si el ahorro s siempre obedece la ecuación de movimiento, la cantidad asegura que tome un valor cero para todo t en el intervalo $[0, T]$. Por lo que, sí empleamos la noción de los multiplicadores de Lagrange podemos construir la expresión para cada valor de t y todavía tenemos un valor cero. Aunque existe un número infinito de valores de t en el intervalo $[0, T]$, sumando sobre t en el periodo $[0, T]$ generaríamos todavía un valor cero:

$$\int_0^T \lambda(t)[f(t,s,R)-\dot{s}]dt$$

Por lo anterior podemos incrementar la anterior funcional objetivo por el integrando anterior sin afectar la solución. Por lo que tenemos una nueva funcional

$$\dot{\aleph} = \aleph + \int_0^T \lambda(t)[f(t,s,R)-\dot{s}]dt = 0$$

$$= \int_0^T \{F(t,s,R) + \lambda(t)[f(t,s,R)-\dot{s}]\}dt$$

Mientras la ecuación de movimiento tenga adherencia para todo t, $\dot{\aleph}$ y $\aleph$ tendrán el mismo valor. El Hamiltoniano estaba definido como

$$H(t,s,R,\lambda) = F(t,s,R) + \lambda(t)f(t,s,R)$$

La sustitución de H dentro de la nueva funcional quedando

$$\aleph=\int_0^T [H(t,s,R)-(t)\ \dot{s}]dt$$
$$=\int_0^T H(t,s,R,\lambda)dt-\int_0^T \lambda(t)\ \dot{s}dt$$

Haciendo una distinción dentro del segundo término del Hamiltoniano, se tiene $\lambda(t)$ $f(t,s,R)$ por un lado y la expresión del multiplicador $\lambda(t)[f(t,s,R)-\dot{s}]$, por el otro. La diferencia es que una tiene explícitamente $\dot{s}$ y la otra no. Integrando por partes tenemos:

$$-\int_0^T \lambda\ (t)\ \dot{s}dt=-\lambda(\mathrm{T})\ s_T+\lambda(0)\ \mathrm{s}_0+\int_0^T s(t)\ \lambda^{\cdot}dt$$

Sustituyendo resultados, podemos escribir nuevamente la funcional objetivo como

$$\aleph=(\underbrace{\int_0^T [H(t,s,R,\lambda)+s(t)\ \lambda^{\cdot}]dt}_{\Omega_1}-\underbrace{\lambda\ (\mathrm{T})\ s_{\mathrm{T}}}_{\Omega_2})+\underbrace{\lambda(0)\ \mathrm{s}_0}_{\Omega_3}$$

La expresión $\aleph$ está compuesta de tres términos aditivos Ω_1, Ω_2, Ω_3. Se Debe destacar que mientras el término Ω_1, una integral dura todo el periodo de planeación, el término Ω_2 se ocupa del tiempo terminal T y Ω_3 se ocupa sólo del tiempo inicial.

El valor de depende de las trayectorias temporales elegidas para las variables s, R y l, así como de los valores elegidos para T y s_T. Ahora centraremos la atención en λ. La variable λ, siendo un multiplicador de Lagrange difiere fundamentalmente de s, R, la elección de $\lambda(t)$ no tiene efecto en el valor $\aleph$, mientras la ecuación de movimiento cumpla con la adherencia a

$$s^{\cdot}=\frac{\partial H}{\partial \lambda}\ \forall t\in[0,T]$$

El siguiente paso en el proceso corresponde a la trayectoria de los retornos $R(t)$ y su efecto sobre la trayectoria $s(t)$. Si tenemos una trayectoria $R^*(t)$ y si perturbamos la trayectoria $R^*(t)$ con una curva de perturbación $p(t)$, es posible generar una vecindad de trayectorias de control

$$R(t)=R^*\ (t)+\varepsilon p(t)$$

Una por cada valor de ε. De acuerdo con la ecuación de movimiento ocurrirán para cada ε una perturbación correspondiente en la trayectoria de ahorro $s^*(t)$, por lo que la vecindad de trayectorias s puede escribirse como:

$$s(t)=s^* (t)+\varepsilon q(t)$$

Más allá, si T y s_T son variables, tenemos que

$$T=T^*+\varepsilon\Delta T$$
$$s_T=s\_T^*+\varepsilon\Delta s\_T$$

Que implica

$$\frac{dT}{d\varepsilon}=\Delta T$$

Y

$$\frac{(ds_T)}{d\varepsilon}=\Delta s_T$$

Ya que tenemos tanto a *s* como a R podemos expresar ℵ en términos de ε, para poder aplicar la condición de primer orden $\frac{d\aleph}{ds}=0$, obteniendo la nueva versión de ℵ como

$$\aleph=\int_0^{T(\varepsilon)}\{H[t, s^*+\varepsilon q(t), \lambda] + \lambda[s^* + \varepsilon q(t)]\}\, dt - \lambda\, (T)s_T + \lambda\, (0)s_0$$

Aplicando la condición $\frac{d\aleph}{d\varepsilon}=0$ derivando obtenemos

$$\int_0^{T(\varepsilon)}\left\{\left[\frac{\partial H}{\partial s}\, q(t)+\frac{\partial H}{\partial R}p(t)\right]+\lambda q^{\cdot}(t)\right\} dt + [H+ \lambda^{\cdot}s]_{t=T}\frac{dT}{d\varepsilon}$$

y la derivada del segundo término con respecto a e es

$$-\lambda(T)\ \frac{ds_T}{d\varepsilon}+s_T\frac{d\lambda(T)}{dT}\frac{dT}{d\varepsilon}=-\lambda(T)\Delta s_T-s_T\lambda^{\cdot}\,(t)\Delta T$$

Por el otro lado el termino $\lambda(0)s_0$ mediante la derivación se elimina. Entonces, $\frac{d\dot{\aleph}}{d\varepsilon}=0$ es la suma de las dos expresiones anteriores. Pero en la primera podemos escribir un componente como

$$[\lambda^{\cdot}s]_{t=T}\frac{dT}{d\varepsilon}=\lambda(T)\, s_T\Delta T$$

Entonces, cuando la suma es fijada en cero, la condición de primer orden queda, después de manejo algebraico, como

$$\frac{d\,\dot{\aleph}}{d\varepsilon}=\int_0^T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial s}+\lambda^{\cdot}\right)q(t)+\frac{\partial H}{\partial R}\,p(t)\right]dt+[H]_{t=T}-\lambda(T)\Delta s_T=0$$

Los tres componentes de ésta derivada están relacionados a cosas arbitrarias diferentes. Veamos esto con atención. La integral contiene curvas de perturbación arbitrarias $p(t)$ y $q(t)$, mientras que los otros dos involucran arbitrarios ΔT y Δs_T, respectivamente. De modo consecuente cada una de los tres debe ser igualada a cero en orden de satisfacer la expresión en cuestión. Al poner el componente de la integral igual a cero, se puede deducir dos condiciones

$$\dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial s}$$

$$\frac{\partial H}{\partial R}=0$$

La primera nos da la ecuación de movimiento para la variable coestado λ, la segunda representa una versión débil[7] de la condición $max_R H$. Debido a que para el problema hemos fijado un punto terminal T y s_T libre, el término ΔT es instantáneamente igual a cero, pero Δs_T no. Para desvanecer la expresión $-\lambda(T)\Delta s_T$ debemos imponer la restricción

$$\lambda(T)=0$$

Con lo que se explica la condición de transversalidad.

Si se encuentra la trayectoria óptima de los retornos y sus curvas de perturbación es posible entender cómo será la trayectoria del ahorro y su posible cambio debido a alguna perturbación. La idea es que el ahorro se puede explicar como un resultado del comportamiento de los retornos. Como los retornos involucran, confianza y riesgo, es una variable sobre la cual podemos influir, y ésta a su vez influirá al ahorro.

7 El sentido de la debilidad es en que decide sobre el supuesto de que *H* es diferenciable con respecto a *R* y de que existe una solución interior.

5. Conclusiones

En un problema de control óptimo el objetivo es encontrar la trayectoria óptima de la variable de decisión, que maximiza un valor funcional. Este problema es mucho más complejo que encontrar el máximo de una función mediante el empleo de cálculo estándar. Esto obedece a que la solución consiste en una función completa –la trayectoria temporal de la variable de decisión. En problemas matemáticamente complicados, puede resultar útil iniciar por una aproximación numérica a la solución. Ciertamente, los matemáticos y economistas suelen converger en buscar dichas aproximaciones para con ello revisar su validez. Cuan exitosa será la aproximación propuesta dependerá de igual modo de la intuición, experiencia y de la suerte. En una solución de control óptimo, claramente, no es realista tratar de adivinar la forma exacta de la trayectoria temporal de la variable de decisión. Pero, para propósitos analíticos se puede conjeturar que la trayectoria temporal de la variable de decisión es conocida.

En la economía financiera, usualmente se asume que el tomador de decisiones elige la trayectoria temporal óptima que maximiza el valor presente del flujo de ingreso generado por algún activo. La función de valor óptimo asume que el tomador de decisiones maxmiza el valor de un activo; sin embargo, otros supuestos de comportamiento pueden ser más realistas. A la luz de las recientes crisis financieras, el valor de las acciones cayó debido a que los inversionistas perdieron la confianza de que los mandos gerenciales maximizan el valor de las empresas en nombre de los accionistas. Esto nos conduce a que diferentes supuestos en el comportamiento de los tomadores de decisión producirán diferentes valores en los activos.

Una cantidad importante de literatura financiera considera el conflicto de intereses entre mandos gerenciales y accionistas, el cual afecta de manera importante la gobernanza corporativa y por ende, el valor de las empresas. La función de valor óptimo muestra la relación entre los niveles de ahorro y el retorno de sus activos, asumiendo aversión al riesgo y comportamiento óptimo. Al derivar la función de valor óptimo se genera el valor de una unidad de ahorro y así como su precio sombra.

Bibliografía

Allen, R. G. D. (1938), *Mathematical Analysis for Economists*, New York: St. Martin's Press.

Borrell Vidal, M. (1985), *Teoría del Control óptimo*, Ed. Hispano Europea.

Cerdá Tena, Emilio (2001), *Optimización Dinámica*, Prentice Hall, Madrid.

Conrad, J.M. (1999), *Resource Economics*, Cambridge: Cambridge University Press.

Chiang, A. (1990), *Elements of dynamic optimization*, McGraw-Hill.

Dixit, A. K. (1990), *Optimization in Economic Theory*, Ed. Oxford University Press.

Dorfman, R. (1969), The Economic Interpretation of Optimal Control Theory, *American Economic Review* 59, 817-831.

Dreyfus, S. (2002), *Richard Bellman on the Birth of Dynamic Programming*, Operations Research 50, 48-51.

Hotelling, H. (1931), The Economics of Exhaustible Resources, *Journal of Political Economy* 39, 137-175.

Intrilligator, M. (1973), *Optimización matemática y teoría económica*, Prentice Hall International.

Kamien, M; Schwartz, N. (1993), *Dynamic optimization: the calculus of variations and optimal control in economic and management*, Ed. North Holland.

Nævdal, E. (2003), Solving Continuous-Time Optimal Control Problems with a Spreadsheet, *Journal of Economic Education* 34, 99-122.

Ortiz Olvera, Juan Marcos (2001), *Ahorro*, tesis de licenciatura, Facultad de Economía, UNAM.

Pinch, Enid R. (1995), *Optimal Control and the Calculus of Variations*, Oxford University Press, Nueva York.

Seierstad, A; Sydsaeter, K. (1986), *Optimal control with economic applications*, Ed. North Holland.

Sethi, S; Thompson, G. (1981), *Optimal control theory: applications to management sciences*, Ed. Martinus Nijhoff.

Takayama, A. (1994), *Analytical methods in Economics*, Ed. Harvester-Wheatsheaf.

Tu, P. (1991), *Introductory optimization Dynamics*, Ed. Springer-Verlag.