Un modelo de generaciones traslapadas para ahorro

Juan Marcos Ortíz Olvera

Resumen

El presente ensayo busca la construcción de un modelo de Generaciones Traslapadas para determinar decisiones de ahorro dentro de un sistema económico, donde este depende de la dotación inicial (herencia), utilidad y retornos. Se exponen las fortalezas y debilidades de los modelos de esta naturaleza y su utilidad para comprender un sistema económico.

Palabras clave:
- Técnicas de Optimización
- Generaciones Traslapadas
- Ahorro
- Mercados Financieros

Abstract

This essay seeks the construction of an Overlapping Generations Model that helps to determine saving choices along an economic system, where savings depends on initial endowment (inheritance), utility and returns. It also shows strengths and weaknesses of Overlapping Generations Models and its utility for understanding an economic system.

Key words:
- Optimization Techniques
- Overlapping Generations,
- Savings
- Financial Markets

JEL Classifications: C02, C61, C62, D91, E21, O16

Presentación

Una de las características que presentan los modelos, tanto de Ramsey (1928) como de Cass (1965) es que los agentes no enfrentan la muerte en su horizonte de decisión. Esta característica, pese a su ayuda como simplificador de la realidad, ha traído como discusión en la literatura económica la posibilidad de remover el supuesto, permitiendo que las generaciones se traslapen y con ello, que intercambien, como consecuencia natural, entre ellas. Dicha remoción nos conduce a una nueva reflexión: ¿Diferirá o no el equilibrio en el estado estacionario? Estas preguntas de investigación son las que propiciaron el surgimiento de lo que hoy se conoce como Modelos de Generaciones Traslapadas (MGT).

Una de las razones por la cual los MGT se siguen empleando hoy día es por su capacidad de analizar, con alto grado de precisión, las implicaciones del comportamiento de los agentes durante su ciclo vital. Esto es posible por dos motivos. Primero, los individuos son guiados por su necesidad de ahorrar durante sus años productivos para poder financiar su consumo durante su jubilación, así como el bienestar de las generaciones futuras. Segundo, permite ver la interacción de las decisiones individuales –los incentivos de la generación actual– y las políticas del gobierno. Por tanto, provee las bases para un mayor examen del comportamiento verdadero de los agentes dentro de una economía. De otro modo, este tipo de modelos permiten la posibilidad de que algún equilibrio descentralizado pueda diferir de la elección del planificador social, incluso este equilibrio, aunque competitivo, no requiere ser Pareto-eficiente, por lo que nos sitúa en el punto de partida, generado por Ramsey y Cass, antes citados.

Construcción de los MGT

El modelado de una economía mediante MGT requiere varias consideraciones. Primero, algunos conceptos preliminares.

Las decisiones se toman y se realizan en puntos en el tiempo llamados *épocas de decisión*. Sea *T* el conjunto de épocas de decisión. Dicho subconjunto de la recta real no negativa puede clasificarse de dos modos: continuo[1] o discreto y como finito e infinito. Cuando es discreto las decisiones se realizan en todas las épocas de decisión. Por otro lado, si es continuo las decisiones pueden realizarse en:

- Todas la épocas de decisión (continuamente)
- Puntos aleatorios en el tiempo, cuando ocurren ciertos eventos
- Tiempos oportunos elegidos por el decisor[2]

Para los problemas en tiempo discreto, se divide el tiempo en periodos o etapas. Entonces formulamos modelos en orden que la época de decisión corresponda con el inicio de un periodo. El conjunto de épocas de decisión puede ser finito, en su caso $T \equiv \{1, 2,..., N\}$ para algún entero $N < \infty$. El caso infinito donde tenemos $T \equiv \{1, 2....\}$. Para incluir ambos casos debemos escribir $T \equiv \{1, 2,..., N\}$ para algún entero $\mathrm{N} \leq \infty$. Cuando T es un intervalo se puede usar tanto $T = [0, N]$ como $T = [0, \infty]$. Los elementos de T se denotarán y nos referiremos a ellos como "tiempo t".

El sistema ocupa un estado en cada época de decisión, por lo que denotaremos al conjunto de estados del sistema posibles por S. Ahora decimos que, el decisor, en algún punto del tiempo observa el sistema en el estado $s \in S$, y puede elegir una acción a del conjunto de acciones admisibles en el estado s, As. Los conjuntos S y As pueden ser:

- Conjuntos arbitrarios finitos
- Conjuntos arbitrarios contablemente infinitos
- Subconjuntos compactos de dimensiones finitas de un espacio Euclidiano
- Subconjuntos Borel no vacíos de espacios completos, y métrico-separables
- Las acciones se pueden elegir tanto aleatoria como determinísticamente

Denotaremos por $\mathrm{P(As)}$ la colección de colecciones de probabilidad sobre subconjuntos (Borel) de As y por $\mathrm{P(A)}$ el conjunto de distribuciones de probabilidad

1 La palabra es empleada como sustantivo más que como adjetivo.

2 Este tipo de problema se analiza mejor empleando métodos de teoría de control óptimo basado en sistemas de ecuaciones dinámicas.

sobre subconjuntos (Borel) de A. La elección aleatoria de acciones significa elegir o seleccionar una distribución de probabilidad $q(\cdot) \in P(As)$, en dicho caso la acción *a* se selecciona con probabilidad $q(a)$. Las distribuciones de probabilidad degenerada corresponden a elección de acción determinista. Los modelos pueden generalizarse permitiendo que tanto S como *As* dependan explícitamente de t[3].

El resultado de elegir una acción $a \in As$ en el estado *s* en la época de decisión *t*.

- El decisor recibe una premio, $r_s(s, a)$
- El estado del sistema en la siguiente época de decisión está determinada por la distribución de probabilidad $p_s(\cdot|s, a)$.

Entonces, sea la función *rs*(*s*, *a*) definida para $s \in S$ y $a \in A$ que denote el valor al tiempo *t* del premio recibido en el periodo *t*[4]. El premio puede ser:

- Pago único recibido en un momento fijo o aleatorio previo a la siguiente época de decisión
- Incrementado continuamente durante el periodo corriente
- Una cantidad aleatoria que depende del estado del sistema es una subsecuente época de decisión
- Una combinación de todo lo anterior

Cuando el premio depende del estado del sistema en la siguiente época de decisión, entonces dejemos que *rt*(*s*, *a*, *j*) el valor en el tiempo *t* del premio recibido cuando el estado del sistema en el época de decisión *t* es s, la acción $a \in A_s$ es seleccionada, y el sistema ocupa el estado *j* en le época de decisión *t+1*. Su valor esperado en la época de decisión puede evaluarse por:

$$r_t(s,a) = \sum_{j=s} r_t(s,a,j)\, p_t(j|s,a)$$

En la expresión anterior la función no negativa $p_t(j|s, a)$ denota la probabilidad que el sistema está en el estado $j \in S$ en el tiempo *t+1*, cuando el decisor elige la acción $a \in As$ en el estado s en el tiempo *t*. La función *pt*(*j*|*s*, *a*) es denominada una función de transición de probabilidad. Note amigo lector que muchos sistemas de transición

[3] Pero dicha generalización es innecesaria para la mayoría de las aplicaciones debido a que tiene un efecto minúsculo en la teoría.

[4] Cuando la función rs(s, a) sea positiva debe considerarse como ingreso, y por ende si es negativa como costo.

pueden ocurrir en el periodo de tiempo entre épocas de decisión, digamos entre t y $t+1$. La formulación del modelo debe ser de modo que las transiciones que ocurren entre épocas de decisión no influyan al decisor. La mayoría de las nociones de optimalidad toda la información necesaria para realizar una decisión en el tiempo t se resume en rt(s, a) y pt(j|s, a).[5]

Limitaciones de los MGT

Una vez discutido esto me permito encontrar las dificultades que hay que resolver para formular un modelo. La lista es la siguiente:

- Número de sexos a modelar
- Duración de vida
- Demografía
- Duración de la vida productiva
- Transferencia de riqueza intergeneracional
- Disponibilidad de mercado del crédito
- Reglas de bancarrota
- Disponibilidad de seguros
- Tratamiento de deuda a la muerte
- Impuestos y subsidios gubernamentales

Desarrollando la lista anterior. Primero, las opciones para el género son dos. Las dificultades de modelar los dos géneros son enormes y, por tanto, difíciles de desarrollar.[6] Debido a esto conviene asumir un agente, que puede ser hombre o mujer. Hablemos ahora de la duración de la vida biológica; los modelos de vida infinita, a pesar de comprimir realidad eficientemente, carecen realismo. Lo que conduce a centrar la atención en dos opciones; por un lado, modelo con duración de vida finita y fija; por otro lado, una duración de vida con expectativa finita estocástica. En lo que respecta al crecimiento poblacional es claro que las poblaciones crecen, pero el suponer una población estacionaría tiene bondades debido a la simplicidad. Aquí las opciones son, de nacimiento a la muerte, de la adolescencia a la muerte o de la adolescencia al retiro. Mediante la existencia del equilibrio se demuestra que se

[5] Bajo algunos criterios debemos usar $r_t(s, a, j)$ en vez de $r_s(s, a)$. Por lo que asumimos generalmente que $\sum_{(j=S)} p_t\,(j|s,a)=1$
El que no requerir la igualdad en la expresión anterior incrementa el rango de sistemas que se puede modelar.

[6] Un modelo de dos géneros no mejora el entendimiento y comprensión de los grandes tópicos. La sugerencia es evitar el modelo de ésta naturaleza, debido a su complejidad y por su poco aporte a la discusión de los grandes problemas.

puede considerar cualquier duración de vida económicamente productiva. Para los seguros y la transferencia de riqueza la necesidad cambia respecto a la edad, por lo que es necesario formular una regla sobre herencias y seguros.

Un modelo sencillo

El tiempo es discreto[7] y corre $t=0, 1, 2...$ Existe incertidumbre sobre dotaciones, así como sobre nacimientos y muertes. Ambos se modelan por variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad.

Para cada $t \geq 0$, I_t es una copia de la unidad de intervalo empleado para parametrizar la colección de agentes vivos al tiempo t. Sea $I_{k,t}$ el subconjunto de I_t correspondiente a los agentes de la edad k al tiempo t, tal que:

$$I_t = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_{k,t}$$

Suponiendo que cada $I_{k,t}$ es un subconjunto Borel[8] de $[0, 1]$.

Sea ϕ_t la medida de probabilidad no atómica definida sobre $B(I_t)$, los subconjuntos Borel de I_t, que corresponde a la distribución espacia de agentes al tiempo t. Entonces:

$$\varphi(I_t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(I_{t,k}) = 1$$

Donde φ_t es la proporción de agentes con la edad k en el tiempo t.

Ahora, para cada agente a están asociados dos procesos estocásticos representado su edad y su riqueza (en términos de dinero). El proceso de envejecimiento se plantea de la siguiente manera.

Sea $\alpha \in I_{k,t}$, indica que el agente a tiene la edad k al tiempo t. Denotamos por ηk la probabilidad que a sobrevive para el periodo siguiente, para cada $k \geq 0$. Entonces $\alpha \in I_{k+1,l+1}$ con probabilidad η_k, y muere a la edad k con probabilidad $1\text{-}\eta_k$[9]. Entonces, podemos construir[10] el proceso de envejecimiento para la colección de todos los agentes en orden de alcanzar las probabilidades de supervivencia también corres-

7 Excepto para los problemas de selección de portafolio y de maximización de utilidad, que son en tiempo continuo, debido a que gano poder en el análisis, además de ser un poco más sencillo.

8 Un espacio Borel es $\{S, B(S)\}$.Un espacio Borel $(A, B(A))$ y una colección de conjuntos As, para el cual $As \in B(A)$ para cada $s \in S$. Sea $B(As)$ denota la colección inducida de subconjuntos Borel de As.

9 Si deseáramos generalizar sería: α sobrevive hasta el periodo $k+l$ con probabilidad $\eta k \cdot \eta_{k+1} \cdots \eta_{k+l-1}$.

10 Para profundizar en la técnica empleada revisar el trabajo de Feldman, M y C Giles "An expository note on individual risk without aggregate uncertainty" *Journal of Econometric Theory*, 35 1985, páginas 26-32.

pondan con las proporciones de agentes que sobreviven, en ese sentido tenemos:

$$\varphi_{t+1}(I_{k+1,t+1}) = \eta_k - \varphi(I_{k,t})$$

$\forall k,\ t.$

Por simplicidad, se asume que la tasa de natalidad es la misma que la de mortandad. Con dicha simplificación se permite emplear el mismo índice I para cada I_t. Ahora, el proceso de envejecimiento correspondiente a un índice α como una cadena de Markov $\left\{K_t^\infty, t = 0,1,...\right\}$ con probabilidades de transición:

$$P\left[K_{t+1}^\infty = k+1 \middle| K_t^\infty = k\right]$$

$$P\left[K_{t+1}^\infty = 0 \middle| K_t^\infty = k\right] = 1 - \eta_k$$

Una condición necesaria y suficiente para ésta cadena tenga una distribución estacionaria es que la duración de la vida del agente neonato es que sea finita. Esta condición es equivalente al requerimiento que la suma infinita

$$\Delta := 1 + \eta_0 \eta_1 + \eta_0 \eta_1 \eta_2 + \ldots$$

sea finita. Asumiendo que D es finita, y si {*vk, k*=0, 1,...} es una distribución estacionaria. Entonces, {*vk*} debe satisfacer:

$$v_{k+1} = \eta_k v_k; k = 0,1\ldots$$

por lo que:

$$v_{k+1} = \eta_k v_k - 1^{\cdots} \eta_0 v_0$$

Normalizando con $\Sigma v_k = 1$, se concluye que:

$$v_{o=\frac{1}{\Delta}}$$

$$v_{k+1} = \eta_k v_k \ldots \frac{\eta_0}{\Delta}$$

para $k \geq 0$

Necesitamos ahora un proceso de riqueza para la economía, para cada $\alpha \in I$, $t \geq 1$ y $k \geq 1$, la variable aleatoria denota la riqueza en dinero del individuo a de edad k - 1 al inicio del periodo t. Queda claro que la dinámica del proceso $\left\{S_{k-1,t-1}^\infty\right\}$ depende de los gastos, herencia y dotación del individuo α en cada periodo.

Pensemos en que en cada periodo cada agente recibe una dotación aleatoria $Y^{\infty}_{k,t}(\omega)$ en unidades de bien no durable. La distribución λ_t de la variable aleatoria $Y^{\infty}_{k,t}(\omega)$ depende de la edad k del agente a pero no del periodo t. La dotación en diferentes periodos es independiente, pero la dotación total del bien en cada periodo t para los agentes de edad k, digamos:

$$C_k = \int_{I_{k,t}} Y^{\infty}_{k,t}(\omega)\varphi_t(d\alpha)$$

Asumida no aleatoria y constante de periodo a periodo [11]. La dotación total para los agentes de todas las edades en el periodo t es:

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$$

Si consideramos ahora un individuo a de edad k -1 y con riqueza $S^{\alpha}_{k-1,k-1}(\omega)$ en el inicio del periodo t. El individuo decide primero sobre el monto

$$b^{\alpha}_{k-1.t}(\omega) \in \left[0, S^{\alpha}_{k-1,k-1}(\omega)\right]$$

que pujará en el mercado de bienes[12]. El precio p_t para el bien puede formarse como:

$$p_t(\omega) := \frac{\sum^{\infty}_{k=1.t}(\omega)\varphi_{t-1}(d\alpha)}{C}$$

Por lo que el individuo recibe el valor de su puja $x^{\alpha}_{k,t}(\omega) := \frac{b^{\alpha}_{k-1,t}}{p_t(d\alpha)}$ de bienes y la consume, con lo que un monto de utilidad igual a $u_{k-1}\left(x^{\alpha}_{k,t}(\omega)\right)$[13]. Ahora para determinar la herencia. Pensemos que el agente a está en su edad 0 en t0, por lo que su utilidad total recibida a lo largo del proceso será:

$$v^{\alpha} := \sum_{k=0}^{\infty}(\eta_0\eta_1^{\cdots}\eta_{k-1})u_k\left(x^{\alpha}_{k,t}(\omega)\right)$$

donde $\eta 0\eta 1^{\cdots}\eta_{k-1}$ es la probabilidad de que el individuo a sobreviva para la edad k. Después de que se forma el precio el individuo recibe el valor de la dotación en dine-

[11] El trabajo de Feldman y Giles op cit nos proporciona una técnica para construir funciones del siguiente tipo: $(\alpha,\omega) \mapsto Y^{\alpha}_{k,t}(\alpha,\omega), k \geq 1, t \geq 1$ que son independientes para cada α fijo par agregada en una constante como en la expresión de C_k.

[12] Las pujas son mensurables conjuntamente en (α, ω).

[13] Aquí u_{k-1}:$[0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ es una función cóncava común para todos los agentes de edad k-1.

ro. El monto $p_t = (\omega) Y^{\alpha}_{k,t}(\omega)$ para esta etapa el individuo tiene la riqueza:

$$\overline{S}^{\alpha}_{k-1,t-1}(\omega) = \overline{S}^{\alpha}_{k-1,t-1}(\omega) - b^{\alpha}_{k-1.t}(\omega) + p_t(\omega) Y^{\alpha}_{k,t}(\omega)$$

El agente sobrevive para el siguiente periodo con probabilidad η_{k-1} y si sobrevive, inicia el siguiente periodo con esta riqueza junto con alguna herencia $Z^{\alpha}_{k,t}(\omega)$. En el caso de que no sobreviva, su riqueza se transforma en parte de su legado total. Entonces, con la probabilidad ηk-1 el individuo sobrevive con riqueza:

$$S^{\alpha}_{k,t}(\omega) = S^{\alpha}_{k-1.t}(\omega) + p_t(\omega) Y^{\alpha}_{k,t}(\omega) = \overline{S}^{\alpha}_{k,t}(\omega) + Z^{\alpha}_{k,t}(\omega)$$

Es evidente, que si el agente es un recién nacido al final de su periodo *t* tendría:

$$S^{\alpha}_{0,t} = Z^{\alpha}_{o,t}(\omega)$$

Por lo que el legado total en el periodo queda como:

$$L_t(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \eta_{k-1}) \int_{I_{k-1,t-1}} S^{\alpha}_{k,t}(\omega) \varphi_{t-1}(d\alpha)$$

que debe igualar a la herencia total:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{I_{k,t}} Z^{\alpha}_{k,t}(\omega) \varphi(d\alpha)$$

Quedando resuelto el aspecto referente a la herencia.

En el sistema propuesto se conserva el dinero de periodo a periodo. En orden de verificar esto, veamos que si $W_{t-1}(\omega)$ es la riqueza total de los agentes al inicio del periodo *t*,

$$W_{t-1}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1,t-1} S^{\alpha}_{k-1,t-1}(\omega) \varphi_{t-1}(d\alpha)$$

después de las pujas y el ingreso pero antes de nacimientos, muertes y herencias la riqueza del individuo $\overline{S}^{\alpha}_{k,t}$ y la riqueza total será:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1,t-1} S_{k-1,t-1}^{\alpha}(\omega)\varphi_{t-1}(d\alpha)$$

permanece igual a $W_{t-1}(\omega)$. Entonces la riqueza total después de nacimientos muertes y herencias esÑ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} \int_{k-1,t-1} S_{k-1,t-1}^{\alpha}(\omega)\varphi_{t-1}(d\alpha)$$

Así que añadido al legado total obtenemos la riqueza total.

Para entender como el individuo decide ahorrar pensemos en un problema sencillo. Imaginemos un individuo se enfrenta a un problema de selección de portafolio óptimo en un mercado financiero con dos activos. Uno de ellos libre de riesgo llamado bono, y el activo riesgoso llamado acción. Este problema de ahorro/consumo tiene un agente económico cuyas acciones no pueden influir a los precios del mercado, puede elegir un portafolio y una estrategia de consumo que determine la evolución. El problema es elegir éstas estrategias para maximizar algún criterio de utilidad. Sea $x(t)$ la riqueza en el tiempo t, y el precio $p_1(t)$ del bono está dado por

$$dp_1(t)=rp_1(t)dt$$

Mientras que el precio $p_2(t)$ del activo riesgoso cambia de acuerdo con las ecuaciones diferenciales estocásticas[14] lineales

$$dp_2(t)=p_2[\alpha dt+\sigma dw(t)]$$

donde $w(\cdot)$ es un proceso Wiener[15] estándar 1-dimensional. Aquí r, α, σ son constantes con $r < \alpha$ y $\sigma > 0$. Una política de consumo/inversión π es un par $(a_1(\cdot), a_2(\cdot))$ consiste de un proceso de portafolio $a_1(\cdot)$ y un proceso de tasa de consumo $a_2(\cdot)$. Esto es $a1(t)$ es la fracción de riqueza en el activo riesgo, mientras que $1-a_1(t)$ es la fracción de riqueza invertida en el bono en el tiempo t, y $a_2(t)$ es la tasa de consumo que satisfacen:

$$0 \leq a_1(t) \leq 1;\ a_2(t) \geq 0$$

14 Las ecuaciones diferenciales estocásticas que se resuelven mediante procesos de Markov.
15 $w(t)$, $t \geq 0$ es un proceso Wiener estándar n-dimensional.

Entonces, cuando usamos una política ahorro/consumo π dada, la riqueza $x(\cdot)=x^*(\cdot)$ cambia de acuerdo a las ecuaciones diferenciales estocásticas:

$$dx(t)=(1-a_1(t))x(t)rdt+a_1(t)x(t)[\alpha dt+\sigma dwt]-a_2(t)dt$$

Los tres términos en el lado derecho corresponden a:

1. ganancias por el dinero invertido en el bono,
2. ganancias por la inversión en la acción,
3. disminución de la riqueza debido al consumo.

Si reescribimos en la forma estándar tenemos:

$$dx(t)=[(r+(\alpha-r)\,a_1(t)x(t)-a_2)\,]dt+\sigma a_1(t)x(t)dw(t)$$

Ahora sea U una función de utilidad[16]. El problema de ahorro/consumo del individuo es maximizar la utilidad esperada descontada total del consumo:

$$J(s,x,\pi)=E^{\pi}_{s,x}\int_s^{\pi} e^{-pt}U\left(a_2(t)\right)dt$$

con la tasa de descuento $r > 0$. Por lo que el programa dinámico queda como:

$$v_s+\max\left\{e^{-pt}U(a_2)+[(r+(a-r)a_1]+\frac{1}{2}(\sigma a_1 x)^2 v_{xx}\right\}=0$$

con condición terminal $v(t, x) = 0$, y la maximización se realiza sobre el conjuntos de pares $a = (a_1, a_2)$ cumpliendo con las restricciones de control. Si ignoramos por un momento las restricciones de control, podrá usted ver que la función dentro de las llaves se maximiza mediante $a^* = (a^*1, a^*2)$ tal que

$$a_1=-\frac{(a-r)v_x}{\sigma^2 x v_{xx}}$$

$$U'=(a_2^*)=e^{ps}v_x$$

Si $vx > 0$ y $vxx < 0$ para $x > 0$. La solución del problema depende, como se puede ver, de la forma funcional de U.

Para maximizar la utilidad total descontada del consumo se debe elegir un proceso de consumo $a(t)$=p($x(t)$)para maximizar la utilidad esperada total descontada:

$$V(x,\pi) = E_0^\infty e^{ps} U[a(t)]dt, \rho > 0$$

Donde *U* es la función de utilidad, y la riqueza $x(\cdot)=x^*(\cdot)$ satisface para todo $t \geq 0$,

$$dx(t)=x(t)[\alpha dt+\sigma dw(t)]-a(t)dt$$

$$x(0)=x$$

Usando nuevamente las ecuaciones:

$$dx(t)=(1-a_1(t)x(t)rdt+a_1(t)x(t)[\alpha dt+\sigma dw(t)]\text{-a\_2}(t)dt)$$

$$dx(t)=[(r+(\alpha-r)a_1(t)x(t)-a_2(t))]dt+\sigma a_1(t)x(t)dw(t)$$

con $a_1(\cdot)\equiv 1$ y $a_2(\cdot)=a(\cdot)$, por lo que podemos escribir

$$dx(t)=[\alpha x(t)-a(t)]dt+\sigma x(t)dw(t)$$

asumiendo que a>1, $\sigma^2>0$ y que la riqueza inicial x es positiva, mientras que $a(t)$=p($x(t)$) está sujeto a la restricción:

$$0\leq\pi(x) \pounds x, \forall x$$

Entonces, para la función de utilidad U, el programa dinámico, con $vx=v'$ y $vxx=v''$, queda:

$$-\rho v(x)+\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''^{(x)}+\max_a[U(a)-av'(x)=0$$

Por lo que la solución depende nuevamente de la forma funcional de *U*, con lo que se obtiene el proceso de consumo óptimo.

Para la toma de decisiones sobre las pensiones públicas suponemos que el gobierno en el tiempo t maximiza una función de bienestar social con una tasa de descuento social ρ.

$$B_t = \sum_{i=t}^{\infty} U_{i-t}\left(\frac{1+n}{1+\rho}\right)$$

De acuerdo con ésta ecuación el gobierno es un planificador social que toma en cuenta el bienestar de las generaciones, tanto la presente como la futura, donde el bienestar de una generación se mide mediante la función de utilidad de un individuo representativo de ésta generación, ponderado por el tamaño de la generación. Asumiendo que $n<\rho$ las condiciones de primer orden para maximizar el bienestar social:

$$u'(c^{T}_{t-1}) = \frac{1+\theta}{1+\theta} u'(c^{y}_{t})$$

$$u'(c^{y}_{t-1}) = \frac{1+f'(k_t)}{1+p} u'(c^{y}_{t})$$

La primera es una condición para la asignación óptima entre vivos jóvenes y viejos, simutáneamente y la segunda optimiza una asignación intertemporal. Así que el planificador social respeta las decisiones de ahorro del individuo. Los esquemas que respetan esto son los sistemas de seguridad social de reparto (PAYG[*pay-as-you-go*]) y los de capitalización (FF[*fully-funded*]). Hay una conclusión en la literatura sobre pensiones que nos dice que el sistema FF conduce a niveles de capital físico en el estado estacionario más elevados que el PAYG. El argumento es sencillo, el adoptar un sistema FF lleva a un nivel de capital más alto debido a que alienta a los individuos a incorporarse al sector formal de la economía, que aunado a las contribuciones genera un beneficio evidente.

Bibliografía

Cass, D. (1965), Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation, *Review of Economic Studies*, pp. 233-240.

Diamond, P. (1965): National Debt in a Neoclassical Growth Model," *American Economic Review*, 55(5), 1126-1150.

Feldman, M. y C. Giles (1985), An expository note on individual risk without aggregate uncertainty, *Journal of Econometric Theory*, 35 Pp. 26-32.

Ortíz Olvera, Juan Marcos (2001), Ahorro, Tesis Licenciatura, Facultad de Economía, UNAM.

Ramsey, F. P. (1928), A Mathematical Theory of Saving, *The Economic Journal*, pp. 543-559.

Samuelson, P. (1958), An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money, *Journal of Political Economy*, 66(6), 467-482.

Solow, R. (1956), A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 70, 65-94.